

谱峰法的窗函数选择^①

陈奎孚^② 焦群英 高小榕
(中国农业大学工程基础科学部) (清华大学)

摘要 导出了单频信号的谱峰与信号参数的关系,利用这一关系可以完全克服 FFT 的栅栏现象,因而可大大改善估计精度。论述了多频成分信号参数估计的谱峰法的合理性。构造了牛顿切线法搜索谱峰的格式,探讨了迭代的初始值选择。就一复杂的 6 频成分仿真信号比较了常见窗函数对谱峰法精度的影响,指出汉宁窗是首选的,其次为高斯窗,而若特别关心谱的分辨力,宜使用余弦矩形窗。所有窗的峰值法估计精度都远优于 FFT 直接估计结果。

关键词 信号处理;幅值谱;窗函数;牛顿迭代法
中图分类号 O321

Window Functions of Spectrum Peaking Method

Chen Kuifu Jiao Qunying Gao Xiaorong
(College of Applied Engineering Sciences, CAU) (Tsinghua University)

Abstract The relationship between spectrum peak and signal parameters for the single-frequency signal is derived, by which FFT barrier can be eliminated completely, hence the estimating precision will be largely improved. The reasonableness of using peaking method to estimate multifrequency signal is expounded. Newton iteration method to search for spectrum peaks is constructed, the iteration initial conditions are discussed, also. The effects of currently used window function are compared on a complex 6-frequency simulation signal, and it is pointed out that Hanning window is most preferable, the second, Gaussian window. If the spectrum resolution is interested in, the cosine-rectangular window is fittable. No matter which window will be used, the estimation results show that the peaking method is much more precise than direct FFT method.

Key word signal process; amplitude spectrum; window function; Newton iteration method

1 谱峰与信号参数的关系

用傅里叶谱估计周期信号的参数,只能截出有限的一段加以处理。有限长度的截取必然存在泄漏。为了抑制泄漏的影响,通常对截出的一段信号加一个对称窗函数。关于对称窗函数

$$w(t) = \begin{cases} w(-t) > 0 & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & t \notin [-T/2, T/2] \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:1996-12-22

①国家自然科学基金资助项目

②陈奎孚,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)74 信箱,100083

的窗谱

$$W(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (2)$$

有如下性质。

性质 1 如果 $w(t)$ 是 $[-T/2, T/2]$ 上非负对称连续窗函数, 则

- 1) $W(\omega)$ 是实偶函数;
- 2) $W(0) \geq W(\omega)$, 等号仅在 $\omega=0$ 时成立。

证明 利用式(1)的对称性, 由式(2)得

$$W(\omega) = 2 \int_0^{T/2} w(t) \cos \omega t dt$$

显然 $W(\omega)$ 是实偶函数。

为证 $W(0) \geq W(\omega)$, 取函数 $g(\omega) = W(0) - W(\omega)$, 即

$$g(\omega) = 4 \int_0^{T/2} w(t) \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt \quad (3)$$

当 $\omega \neq 0$, 式(3)的被积函数非负且不恒为零, 根据定积分性质^[1], $g(\omega)$ 必恒大于零, 故 $W(0) > W(\omega)$ 。同理可证 $W(0) > -W(\omega)$ 。所以 $W(0) \geq |W(\omega)|$, 且等号仅在 $\omega=0$ 时成立。

这个性质说明对称窗函数的幅值谱在 $\omega=0$ 时最大。

单频信号 $x(t) = A \exp(j\omega_0 t + \varphi_0)$ 加 $w(t)$ 的谱为

$$X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j\omega t) dt = A \exp(j\varphi_0) W(\omega - \omega_0) \quad (4)$$

$|X(\omega)|$ 等于 $|W(\omega)|$ 向右平移 ω_0 , 垂直方向扩大 A 倍。显然, $|X(\omega)|$ 的最高点对应信号频率。如果找到了最高点, 则根据最高点处关系

$$X(\omega_0) = A \exp(j\varphi_0) \int_{-T/2}^{T/2} w(t) dt \quad (5)$$

就很容易地精确确定参数 A 和 φ_0 。

对于多个频率成分信号 $x(t)$, 每个成分的谱是 $(-\infty, +\infty)$ 上的振荡曲线, 所以会有如下影响:

- 1) 除在信号频率附近的谱峰外, 其他地方也会出现很多小峰;
- 2) 由于其他成分的谱泄漏, 对应频率的谱峰将偏离该频率;
- 3) 当 2 个频率相距很近时, 上述偏离将使对应 2 个成分谱峰合成 1 个峰, 从而分辨不出 2 个频率成分来。

当频率相距较远, 能量相差不大时, 可不计 2) 和 3) 的误差。对于多频成分的 $|X(\omega)|$, 显然单频信号式(4)和(5)的最大值判据应改为“局部最大值”。由于旁瓣存在, 并非每个 $|X(\omega)|$ 极大值都对应一个信号频率, 但根据窗谱衰减性质以及性质 1, 信号频率处的谱峰应在附近几个谱峰中最高。显然, 这是一个模糊的判据, 它需要人们的先验知识进一步加以明确。

综上所述, 确定谱峰的位置是非常重要的, 但遗憾的是, 流行的 FFT, 由于栅栏效应的存在, 很难对准谱峰, 这时往往只好用相邻的最高一条谱线来近似。分析表明, 这对频率误差最大只有 $\Delta f/2$ ($\Delta f = 1/T$), 幅值误差却可达 36% (矩形窗), 而相位误差达 90° 。文[2, 3]意识到这一点后, 采用主瓣内的 2 条谱线加以校正, 取得了很好的效果, 但这一方法需针对不同窗函数

推导不同的校正公式;文献[4]采用等间隔扫描的办法来消除栅栏效应;文献[5]的方法是拟合;文献[6]对当前的几种方法作了总结;笔者则根据性质1采用牛顿迭代法搜索局部最大值的办法来确定信号的频率、幅值和相位。这一方法与FFT相结合后具有很高的效率,且无须对每个窗推导校正公式;但不同的窗的泄漏不同,对估计结果的精度影响有差异。本文比较常见窗对谱峰法的精度影响。

2 迭代公式和迭代区间

为了使迭代格式简便,现把目标函数选为幅值平方 $S(\omega)$,即

$$S(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) \quad (6)$$

式(6)中 $X(\omega)$ 是信号 $x(t)$ 的离散傅里叶谱,即

$$X(\omega) = \Delta T \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) x(t_i) \exp(-j\omega t_i) \quad (7)$$

式中: $w(t)$ 为窗函数; $x(t_i)$ 是信号 $x(t)$ 在 $t_i = i\Delta T$ 处的采样值, ΔT 为采样间隔; N 为采样点数。

$S(\omega)$ 取极大值的必要条件为 $S'(\omega) = 0$,这是关于 ω 的超越方程,可选牛顿切线法^[7]用数值方法求解。记迭代初始条件 $\omega = \omega_1$,则下一个近似值为

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{S'(\omega_1)}{S''(\omega_1)} \quad (8)$$

根据式(6)的定义,式(8)中的 $S'(\omega)$ 和 $S''(\omega)$ 分别为

$$S'(\omega) = 2\text{Re}[X'(\omega)X^*(\omega)] \quad (9)$$

$$S''(\omega) = 2\text{Re}[X''(\omega)X^*(\omega)] + 2|X(\omega)|^2 \quad (10)$$

式(9)和(10)中 $X(\omega)$ 自然可由式(7)计算, $X'(\omega)$ 和 $X''(\omega)$ 可由以下2式方便地计算出:

$$X'(\omega) = -j \sum_{i=0}^{N-1} t_i w(t_i) x(t_i) \exp(-j\omega t_i)$$

$$X''(\omega) = - \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 w(t_i) x(t_i) \exp(-j\omega t_i)$$

由于 $S(\omega)$ 与 ω 的关系非常复杂, $S'(\omega) = 0$ 存在多个根,不同的初始条件可收敛不同的根,甚至会收敛到 $S(\omega)$ 的谷点或驻点上。一般来说,如果FFT的2条谱线高于周围相邻的谱线,那么这2条谱线间很可能存在一个峰,该峰对应信号的一个频率成分,如选用这2条谱线中间的 ω 作为 ω_1 ,通常经过几次式(8)的迭代便可得到相当准确的值。迭代过程中有时会出现 ω_2 超出了两谱线间的范围,可在两谱线间随机产生一个 ω_1 ,继续迭代。当然如果这个现象出现多次,说明这两谱线间很可能没有谱峰。

3 仿真信号与窗函数

为了检查加窗对峰值法的影响,设计如下具有6个频率成分的仿真信号:

$$x(t) = \sum_{i=1}^6 A_i \exp[-j(2\pi f_i t + \varphi_i)]$$

式中的参数列于表1。采样频率 $f_s = 1\,000$ Hz,采样点数 $N = 1\,024$,FFT的谱线间隔 $\Delta f = 0.976\,56$ Hz。

表1 仿真信号参数

| i | f_i/Hz | A_i | $\varphi_i/(\circ)$ | i | f_i/Hz | A_i | $\varphi_i/(\circ)$ |
|-----|-----------------|---------|---------------------|-----|-----------------|---------|---------------------|
| 1 | 100 | 1.000 0 | 36.00 | 4 | 110 | 0.080 0 | 159.60 |
| 2 | 101 | 1.000 0 | 66.36 | 5 | 130 | 0.100 0 | 136.80 |
| 3 | 106 | 0.800 0 | 83.16 | 6 | 238 | 0.100 0 | -94.32 |

6个成分中:第1,2频率相距很近,用于考察泄漏影响特别严重的情形;第3,4两频率成分能量悬殊很大;第5,6频率相距其他频率较远或很远。

选择矩形窗、汉宁窗、哈明窗、余弦矩形窗和高斯窗共5种窗函数^[8]。

矩形窗

$$w(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

它相当于直接截断。

汉宁窗和哈明窗

$$w(t) = \begin{cases} 1 - 2\alpha + 2\alpha \cos(2\pi t/T - \pi) & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

$\alpha=0.25$ 对应海宁窗, $\alpha=0.23$ 对应哈明窗。

余弦矩形窗

$$w(t) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(10\pi t/T - 5\pi) & t \in [0, T/10] \\ 1 & t \in [T/10, 9T/10] \\ 0.5 + 0.5 \cos(10\pi t/T - 5\pi) & t \in [9T/10, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

它综合了矩形窗和余弦窗的优点,广泛地应用于周期信号分析。

高斯窗

$$w(t) = \begin{cases} \exp[(2t/T - 1)^2 \ln \eta] & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

在无穷域上,高斯窗谱无旁瓣,但在有限的 T 上,旁瓣是无法消除的。不过可调整 η 使旁瓣很小,但是 η 也影响主瓣宽度,从而影响谱的分辨力。

图1示出 $\eta=10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$ 的仿真信号幅值谱。可以看出:对于稀频成分的主瓣, η 只影响主瓣的胖瘦,而不影响其位置和高度;在密频区, η 的大小影响到峰的位置和幅值,甚至 η 太小时,106 Hz 主瓣太宽而淹没 110 Hz 主瓣。下文的 η 取为 0.1, 它表示 $w(T)/w(T/2) = w(0)/w(T/2) = 0.1$ 。

由式(5)有

$$C = |X(\omega_0)| = A \int_{-T/2}^{T/2} w(t) dt$$

它表明信号频率处的谱幅与信号幅值差一个常数倍。该常数与窗有关,窗给定常数即确定,它就是窗的面积。为了便于比较,本文的谱计算均除以相应窗的常数 C 。对于矩形窗、汉宁窗、哈明窗、余弦矩形窗和高斯窗, C 值分别为 $T, 0.5T, 0.54T, 0.9T$ 和 $T \int_0^1 \exp(-t^2 \ln \eta) dt$ 。

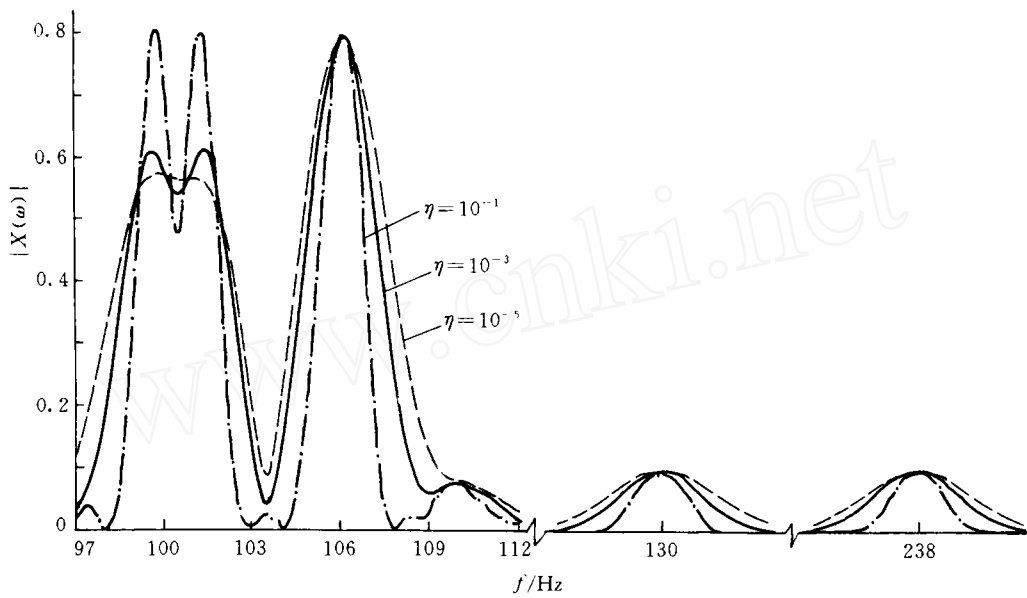


图 1 不同衰减程度的高斯窗的仿真信号幅值谱

4 仿真结果分析与讨论

图 2 绘出了仿真信号加矩形窗、汉宁窗和余弦矩形窗的 3 条幅值谱在感兴趣段的曲线。

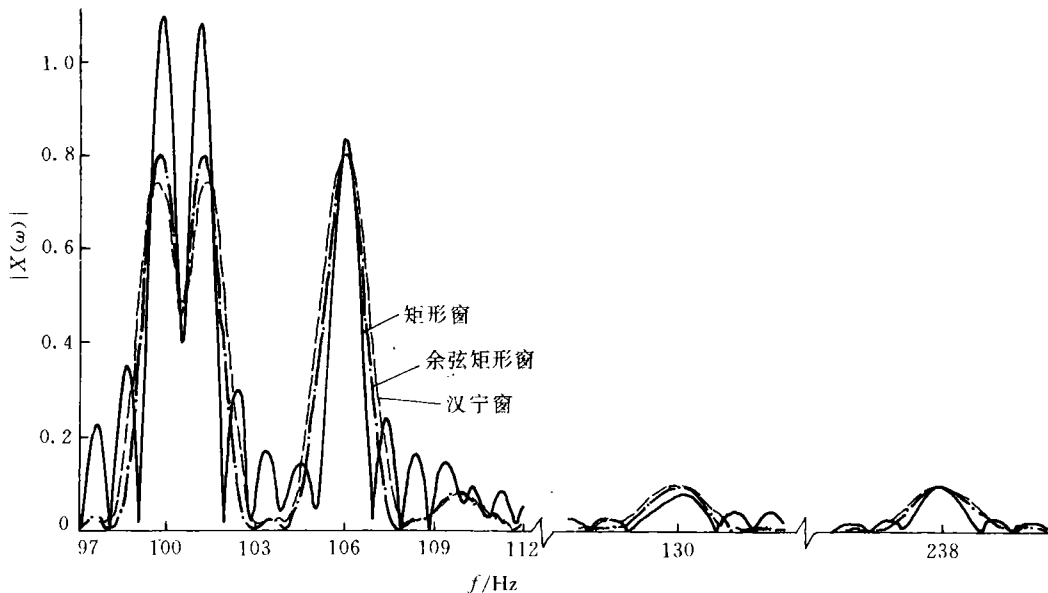


图 2 仿真信号幅值谱示意图

如前所述,不论哪一种窗函数,由 FFT 谱线峰值得到的结果频率误差较小,相位和幅值误差均很大,尤其泄漏严重时误差更大。限于篇幅,具体数据不再给出。下面只讨论峰值法。

1) 相隔较远情形。仿真信号中第 6 个成分的频率相距其他 5 个频率较远。因为其他成分

泄漏影响都比较小,无论采用哪一种窗,峰值法的精度都很高,具体数据见表2。由于汉宁窗和余弦矩形窗的连续条件比其他3种窗好,窗谱衰减速度较快,其精度比另外3种窗更好一些。矩形窗的误差最大,幅值精度为3%,相位约差 7° 。由表中数据还可看出,如果频率很准确,则幅值和相位也是很准确的。

表2 第6频率成分估计

| 参数 | 矩形窗 | 汉宁窗 | 哈明窗 | 余弦矩形窗 | 高斯窗 |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| f/Hz | 237.972 5 | 238.000 0 | 237.991 2 | 238.000 0 | 237.991 2 |
| A | 0.097 4 | 0.100 0 | 0.099 6 | 0.100 0 | 0.099 5 |
| $\varphi/(\circ)$ | -87.322 1 | -94.320 5 | -92.393 7 | -94.323 1 | -92.341 7 |

2)相隔不太远情形。仿真信号第5与第6个频率成分相距较远,而与前面几个相距不很远(与第3个相差 $24\Delta f$)。表3给出峰值法的结果。除误差增大外,其他规律与1)相同。注意,矩形窗的频率误差为 $0.26\Delta f$,幅值误差只有3%,而相位误差 48° ,已不再可用。

表3 第5频率成分估计

| 参数 | 矩形窗 | 汉宁窗 | 哈明窗 | 余弦矩形窗 | 高斯窗 |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| f/Hz | 130.254 3 | 129.999 6 | 130.049 7 | 129.997 1 | 130.047 3 |
| A | 0.083 1 | 0.100 0 | 0.096 5 | 0.100 4 | 0.096 0 |
| $\varphi/(\circ)$ | 88.248 0 | 136.870 2 | 127.678 1 | 137.229 6 | 128.177 3 |

3)能量悬殊情形。仿真信号中第3与第4个频率成分的能量悬殊较大,而且相距较近($4\Delta f$)。从矩形窗的FFT谱线上根本发现不了2个峰。加余弦矩形窗,能够发现两峰,但是很勉强;而加哈明窗和汉宁窗,可以很明显地判定存在一峰值(参见图2)。估计出的参数见表4。当然,对于能量大者,精度要好些,小能量成分的泄漏影响比较小,而第4频率因幅值太小,精度随窗的不同有很大差异:汉宁窗的幅值误差为0.1%,相位误差为 2° ,而矩形窗则完全表现不出来。注意,由于第1,2频率的泄漏影响,第3频率的精度没有第5频率的好。

表4 第3与第4频率成分估计

| 频率 | 参数 | 矩形窗 | 汉宁窗 | 哈明窗 | 余弦矩形窗 | 高斯窗 |
|------|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 第3频率 | f/Hz | 106.065 3 | 105.993 9 | 106.017 8 | 106.028 1 | 106.024 3 |
| | A | 0.831 1 | 0.799 9 | 0.803 2 | 0.752 1 | 0.801 6 |
| | $\varphi/(\circ)$ | 67.728 2 | 84.354 6 | 79.526 1 | 82.701 5 | 78.423 5 |
| 第4频率 | f/Hz | | 110.019 2 | 109.793 1 | 109.959 8 | 109.738 6 |
| | A | | 0.080 5 | 0.076 9 | 0.115 1 | 0.079 0 |
| | $\varphi/(\circ)$ | | 157.210 0 | 19.460 3 | 20.034 2 | 35.754 3 |

4)频率很近的情形。仿真信号中第1与第2个频率十分接近(约 $1\Delta f$),泄漏的影响非常严重;但是峰值法确定的频率精度仍然比FFT谱线法要好一些,幅值的误差随窗而异:余弦矩形窗的误差只有1%,而频率相隔较远时表现得很好的汉宁窗和哈明窗的幅值误差达20%(参见图2),矩形窗的幅值误差约为10%。各种窗的相位尽管具有一致性(因幅值较大,其他成分的影响较小),但与真实相位相差很大,不再有任何意义。限于篇幅,不再给出具体估计值。由图2可知,汉宁窗的主瓣比矩形窗稍宽,所以当频率差进一步缩小时,汉宁窗比矩形窗和余弦矩形窗的2个峰重合得要早一些,即汉宁窗的频率分辨力较低。然而矩形窗的分辨力高也是很有

限的,与远频和能量悬殊时汉宁窗的优良特性相比,汉宁窗应当是优选的。

实际调试表明,高斯窗的精度虽比汉宁窗稍低,但是可调整衰减系数 η ,使旁瓣很小,从而减少假频出现的概率,所以它也是推荐使用的窗函数。若特别注重相近频率的影响,则余弦矩形窗应是推荐的窗函数。

5 结 论

1) 采用迭代法搜索峰值以确定信号的参数,这种方法的精度大大高于FFT谱线法。

2) 比较了各种窗函数对峰值法精度的影响,指出对于一般信号宜采用汉宁窗和高斯窗,而特别关心两近频信号时宜采用余弦矩形窗。

3) 导出了用牛顿切线法搜索峰值的迭代格式,研究了迭代初始值选择的准则。

参 考 文 献

- 1 施学喻. 高等数学教程. 北京:清华大学出版社,1985. 378~379
- 2 谢 明,丁 康. 频谱分析的校正方法. 振动工程学报,1994,7(2):172~179
- 3 黄迪山. FFT相位误差分析及实用修正方法. 振动工程学报,1994,7(2):183~189
- 4 刘进明,应怀樵. FFT谱连续细化分析的傅里叶变换法. 振动工程学报,1995,8(2):162~166
- 5 牛玉广,陈 彭,宋之平. 整周期采样信号的局部谱细化. 动态分析与测试技术,1996(3):21~25
- 6 丁 康,谢 明,王志杰. 离散频谱的幅值、相位和频率的校正方法及误差分析. 动态分析与测试技术,1996(1):10~29
- 7 徐萃薇. 计算方法引论. 北京:高等教育出版社,1985. 195~196
- 8 应怀樵. 波形和频谱分析与随机数据处理. 北京:中国铁道出版社,1985. 427~432