中国农业大学学报　1997,2(2):87～91
Journal of China Agricultural University

机械CAD中的通用3D自由曲面造型技术

王 福 军①　　　　叶 海 建
（中国农业大学水利与土木工程学院）（中国农业大学CAD中心）

摘　要　利用曲面网格的边界曲线直接定义3D曲面，既能保证曲面的光滑过渡，即C^1连续，又可避免通过确定扭矢来达到控制曲面的复杂计算。本文的方法不依赖于任何CAD支撑环境中的曲面造型机制，具有极好的通用性。文中给出了应用实例。

关键词　机械；自由曲面；造型；CAD
中图分类号　TH122

Modeling of 3D Free-Curved Surface in Machine CAD

Wang Fujun　　　　Ye Haijian
(College of Water Conservancy and Civil Engineering, CAU)　(CAD Center, CAU)

Abstract　The 3D surface can be defined directly by the boundary curve of the patch surface. The surface will be C^1 continuous if the boundary curves connecting each two patches are C^1 continuous. The complex calculation needed to control the parameters of surface can be avoided by using the models presented in this paper. This new method is not dependent on any of surface modelling mechanism in CAD support software. Application examples are given and it has been shown that this method has a very good universality.

Key words　machine; free-curved surface; modeling; CAD

汽车车身、飞机机翼和涡轮机叶片，都是由形状比较复杂、不能用二次方程描述的自由曲面组成的。如何借助计算机有效地描述这些不规则的三维曲面，一直是机械CAD的热门话题。从Coons曲面、Bezier曲面、B-Spline曲面到现今广为流行的NURBS曲面，已经研究出数种曲面模型用来插补3D空间中的离散点群，使之形成具有某种光滑度的曲面，但在借助这些曲面模型进行实际产品的3D曲面造型时，存在如下几方面的问题：第一、当直接利用CAD支撑软件来生成上述各种曲面模型时，虽然复杂的造型过程因CAD支撑软件的引入而变得较容易实现，但得到的只是曲面本身，并不可能直接得到描述该曲面的数学函数。这样，就使对曲面的充分利用变得很困难，例如在打算对曲面进行有限元计算时，不能直接对模型作任意形状的网格剖分。第二、如果直接从上述各曲面模型的数学定义出发，通过开发者的直接编程来定义曲面，虽然可获取该曲面的数学函数，但数学推导复杂，计算量大，一般要解巨型方程组，尤其是当多块矩形区域相连时，要保证全部边界处的光滑过渡是很困难的。第三、利用这些曲面模型生成曲面时，一般要给定较为复杂的边界条件。如为了使2个双三次Coons曲面片具有

收稿日期：1996-09-04
①王福军，北京清华东路17号中国农业大学（东校区）58信箱，100083

C^1 连续，一定要保证 2 个曲面片的扭矢(二阶偏导数)具有某种特定的关系，因此，曲面的形状很难控制。所以，研究一种通用的、不依赖于具体 CAD 支撑环境的、容易实现的曲面造型技术，在机械 CAD 中有着非常现实的意义。

1 3D 自由曲面的表示

在计算机中，一个自由曲面可由一系列的曲面片拼合而成，因此，曲面片是曲面的基本单元，一个曲面片是以曲线为边界的点的集合，如图 1 所示。曲面片可用双参数三次方程表示。使用参数方程，是由于可将自变量与因变量完全分开，使得参数变化对各因变量的影响可以明显地表示出来，同时，可使被描述的自由曲面的形状本质上与坐标系的选取无关；而使用三次方程的理由是，当要使曲面片的连接处保持位置和斜率的连续性时，三次方程是能表示这种情况的最低阶次方程。当然，用更高阶次的参数方程也可以，但计算复杂，且会产生不必要的扭摆[1]。这样，曲面片可用下式来表示：

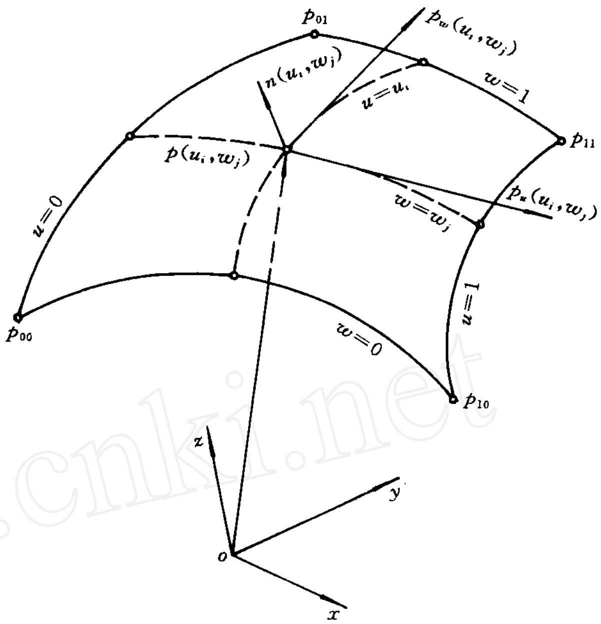


图 1 曲面片的表示方法

$$
\begin{aligned}
S(u,w)=&\beta_{33}u^3w^3+\beta_{32}u^3w^2+\beta_{31}u^3w+\beta_{30}u^3+\\
&\beta_{23}u^2w^3+\beta_{22}u^2w^3+\beta_{21}u^2w+\beta_{20}u^2+\\
&\beta_{13}uw^3+\beta_{12}uw^2+\beta_{11}uw+\beta_{10}u+\\
&\beta_{03}w^3+\beta_{02}w^2+\beta_{01}w+\beta_{00}
\end{aligned}
$$

简记为

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\beta_{ij}u^iw^j \qquad (u,w)\in[0,1]$$

为了使其更具通用性，可写成如下形式：

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\beta_{ij}u^i(1-u)^{3-i}w^j(1-w)^{3-j} \qquad (u,w)\in[0,1] \tag{1}$$

式中 u,w 为参数，将其值限制在 0 到 1 这一闭区间之内(用 $u,w\in[0,1]$表示)，可使所表示的曲面总是有界的，不需另设其他的几何数据来定义边界。式(1)中，参数方程共有 16 个系数向量，每一系数有 3 个 x,y,z 独立的分量，因而总共有 48 个自由度。

2 曲面网络曲线的确定

在进行曲面造型之前，一般来讲，曲面的控制点(也就是空间离散点)已通过特定的专业计算程序确定下来，如水泵的叶片，可通过水泵的水力计算得到叶片的木模图，从而得到叶片表

面上数个离散点的空间位置。接下来,便是将空间中的离散点用若干条自由曲线连接起来,从而按照某种顺序作出纵横相交的数条曲线,形成一个曲面网络。对于空间 n 个有序的给定点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,便用三次样条曲线进行插补,可以通过这 n 个点描出一条光滑曲线来。实际上,这条曲线是由每 2 个给定点间定义的一段三次曲线光滑连接而成的,因此,需要计算 $n-1$ 条分段曲线。曲线的三次参数方程可用下式表示:

$$C(t)=\sum_{i=0}^{3}\alpha_i t^i(1-t)^{3-i} \qquad t\in[0,1] \tag{2}$$

式中,t 为参数,利用 n 个给定点的坐标可确定各段曲线函数中的系数 $\alpha_i(i=0,1,2,3)$。令 $t=0,1$,可以看出,系数 α_0,α_3 即为曲线段(假设为第 k 段,$k=0,1,\cdots,n$)两端点的坐标(P_k,P_{k+1}),α_0,α_3 为已知,因此,对于每一曲线段,只需求出系数 α_1,α_2。

如果对式(2)求导,并设 $t=0,1$,则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-3\alpha_0+\alpha_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=-\alpha_2+3\alpha_3$$

从而

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=3\alpha_0+\left.\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\\ \alpha_2&=3\alpha_3+\left.\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

为了计算 $\mathrm{d}C(t)/\mathrm{d}t$,现定义每两点($P_k,P_{k+1}$)间的弦线矢量为 $d_k=P_{k+1}-P_k$,规定除首尾 2 个节点外的每一个节点处的切矢为

$$P'_k=\gamma_k\frac{d_{k-1}+d_k}{|d_{k-1}+d_k|} \qquad (k=2,3,\cdots,n-1)$$

其中 γ_k 为权值。如果用 P'_k 代替 $\mathrm{d}C(t)/\mathrm{d}t$,则可利用式(3)来确定除首尾两段外的每一段曲线的系数。在首尾两段曲线中,各只有一个切矢被定义,还需追加一个条件以导出曲线系数。为此,现定义首尾两端点处(P_1,P_n)的二阶导数为 0,这样,在首段曲线中,有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=3\alpha_0/2+(3\alpha_3-P'_2)\\ \alpha_2&=3\alpha_3-P'_2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

在尾段曲线中,有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=3\alpha_0+P'_{n-1}\\ \alpha_2&=(3\alpha_0+P'_{n-1})/2+3\alpha_3/2\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

切矢定义式中的权 γ_k 可以是任意实数。通过给定不同的 γ_k 值,便可控制该段曲线的形状,不管怎样,总能自动保证与相邻曲线段的光滑连接。在实际应用中,初次使用本方法时,可暂取 $\gamma_k=1$,待有一定经验后,视具体情况改变 γ_k,使曲线的形状更令人满意。这样,通过式(3)~(5)的计算,得出式(2)后,曲面网络中的各条曲线便确定下来,各曲线的 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 即为已知。

3　曲面的计算

式(1)给出了曲面网络中各曲面片的双三次函数 $S(u,w)$,u,w 沿着 3D 空间曲面的 2 个

不同的延伸方向。对于曲面函数(1)中的16个系数 $\beta_{ij}(0\leqslant i,j\leqslant 3)$，可用如下矩阵表示：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03}\\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{bmatrix} \tag{6}$$

分别令函数(1)中的 $u,w=0,1$，曲面函数即表示曲面的4条边界线。由于先以曲线(2)规定了其边界，故曲面函数(1)在边界处应与曲线函数(2)重合，且其系数由式(3)决定；因此，系数矩阵(6)中的外围12个系数，可以用曲线系数 α_i 表示，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03}\\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{00} & a_{11} & a_{12} & P_{01}\\ a_{21} & \beta_{11} & \beta_{12} & a_{31}\\ a_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} & a_{32}\\ P_{10} & a_{41} & a_{42} & P_{11}\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中：$P_{00},P_{01},P_{10},P_{11}$ 为曲面片的4个角点坐标(见图1)；$a_{i1},a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 为第 i 条边界曲线的系数 α_1,α_2。因此，在曲面函数(1)里的16个向量系数中，只有4个($\beta_{11},\beta_{12},\beta_{21},\beta_{22}$)是待定的。为了求得 $\beta_{11},\beta_{12},\beta_{21},\beta_{22}$ 这4个系数，可分别对式(1)求二阶混合偏导数，并分别令 $u,w=0,1$，这样可得如下4个关系式：

$$\left.\frac{\partial S^2(u,w)}{\partial u\,\partial w}\right|_{u=0,w=0}=\beta_{11}+9\beta_{00}-3(\beta_{10}+\beta_{01})$$

$$\left.\frac{\partial S^2(u,w)}{\partial u\,\partial w}\right|_{u=0,w=1}=-\beta_{12}-9\beta_{03}+3(\beta_{13}+\beta_{02})$$

$$\left.\frac{\partial S^2(u,w)}{\partial u\,\partial w}\right|_{u=1,w=0}=-\beta_{21}-9\beta_{30}+3(\beta_{20}+\beta_{31})$$

$$\left.\frac{\partial S^2(u,w)}{\partial u\,\partial w}\right|_{u=1,w=1}=\beta_{22}+9\beta_{33}-3(\beta_{23}+\beta_{32})$$

它们的左侧即为4个顶点处的扭矢。文献[2]认为，对于一般的自由曲面，4个扭矢可取相同的值，用 E 表示。实际应用中，可简单地取 $E=0$。这样，可通过下式求解：

$$\left.\begin{aligned}\beta_{11}&=3(\beta_{10}+\beta_{01})-9\beta_{00}+E\\ \beta_{12}&=3(\beta_{13}+\beta_{02})-9\beta_{02}-E\\ \beta_{21}&=3(\beta_{20}+\beta_{31})-9\beta_{30}-E\\ \beta_{22}&=3(\beta_{23}+\beta_{32})-9\beta_{33}+E\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

不难证明，式(8)自动满足 C^1 连续，即2个曲面片(假定为 A,B)在某一个方向(假定为 u)上相邻时，有

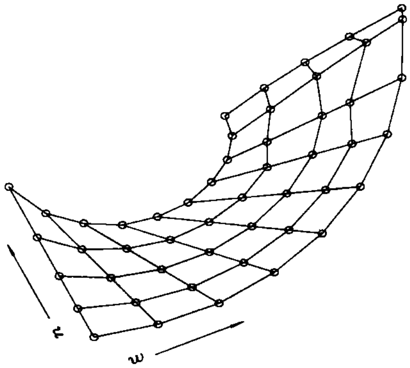
$$\left(\left.\frac{\partial S(u,w)}{\partial u}\right|_{u=0}\right)_A=\left(\left.\frac{\partial S(u,w)}{\partial u}\right|_{u=1}\right)_B$$

上面讨论的是曲面片为四边形时的情况。对于三角形曲面片，可以把它当作是有1条边长为0，2个顶点重合的四边形来处理。

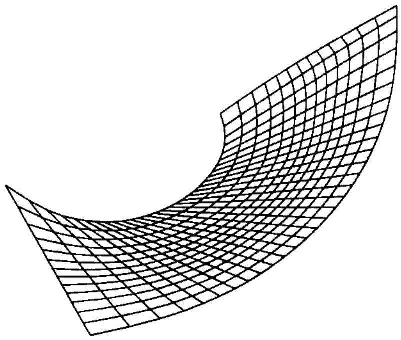
4 应用实例

图2(a)示出了水泵叶片的表面控制点，为了清楚起见，将各控制点用直线连接了起来。此

结果是根据水泵的水力计算得来的。图中与 w 方向近似垂直的连线上的点，落在同一个轴面



(a)



(b)

图 2　混流泵叶轮上的一枚叶片

内(最上一条表示出口边，是例外)，也就是轴面与叶片的交点；图中与 u 方向近似垂直的连线是流线，将轮毂到轮缘的区域分成 4 个流束。此叶片装在一台 $n_s=550$ 的导叶式混流泵上，用在我国南水北调的一个泵站上。图 2(b)是利用本文的方法，确定网络曲线并进行曲面计算之后叶片 3D 曲面的造型结果。由此生成的 3D 曲面模型，具有如下特点：

1)曲面的计算是以边界曲线的计算结果为基础，而且只参考构成网格边界线的参数，而无需考虑相邻网格的情形，从而使本来很复杂的曲面间的光滑过渡问题，化作较简单的曲线光滑过渡的问题来处理，曲面的计算变得简单得多。

2)曲面网络可以是任意形状，只要保证其中的每一个网格是四边形或三角形即可。

3)可自动保证网络中相邻的任意 2 个网格的连接处既是 C^0 连续，又是 C^1 连续。

4)曲面模型的计算不依赖于任何 CAD 支撑环境，既可以在操作系统下直接生成，又可以在 CAD 支撑软件中生成。图 2(b)是在 SUN 工作站上利用 INTERGRAPH 公司的 PPL(Parametric Programming Language)[3]编写程序后，在 EMS(Engineering Modeling System)支撑软件下实现的。利用 ADS 编程工具 C/C++[4]，笔者同样在 Auto CAD R13 中生成了该曲面模型。这种 3D 曲面造型方法是具有通用性的。

参 考 文 献

1　唐泽圣，周嘉玉，李新友．计算机图形学基础．北京：清华大学出版社，1995．187～197

2　赵修伟，孙家广．以网格曲线为连续条件的光滑曲面．计算机辅助设计与图形学学报，1994，6(2)：81～88

3　INTERGRAPH. Engineering Modeling System Reference Manual. Intergraph Corporation，1992，8-2～8-6

4　王福军．Auto CAD R12/R 13 应用 C 程序设计——机械 CAD 编程方法与实例．北京：电子工业出版社，1995．5～9