第 1 卷 中国农业大学学报 Vol. 1 No. 4
第 4 期 Journal of China Agricultural University 1996

适用于柔性圆筒仓的修正的 Janssen 公式

冯云田[①] 华云龙
(基础科学部)

摘 要 考虑到筒仓仓壁和贮料的可变形性,导出了适用于柔性筒仓的修正的 Janssen 公式,并提出了刚度比 $\alpha(\equiv E_s R/E_w t)$ 的概念。新的公式表明,刚度比 α 对仓壁压力分布有影响,当 $\alpha<0.1$ 时影响较小,$\alpha\geqslant 0.1$ 时影响比较显著;对于柔性筒仓,压力比随深度变化,当 $\alpha>0.1$ 时随着深度增大压力比有较大幅度的减小。只有仓壁为刚性时压力比才是常数。

关键词 修正的 Janssen 公式; 柔性筒仓; 仓壁压力
中图分类号 TU312.1; TU249

Modified Janssen Formula for Flexible Circular Bins

Feng Yuntian Hua Yunlong
(Department of Basic Sciences)

Abstract The modified Janssen formula, which takes account of the effects of the deformability of bin and stored material, is developed. According to the new formula, the pressure distribution on the bin wall is affected by the ratio of rigidity $\alpha(\equiv E_s R/E_w t)$. When $\alpha<0.1$ the effect is small, but when $\alpha\geqslant 0.1$, the effect becomes important. In addition, the new formula shows that the lateral pressure ratio k varies with the depth of the grain stored in the flexible bin, and when $\alpha>0.1$, the value of k decreases greatly with increasing of the depth. k is constant only for rigid bin wall.

Key words modified Janssen formula; flexible bin; pressure on bin wall

筒仓仓壁压力是筒仓设计中的一个"老大难"问题[1]。筒仓中的贮料一般是粮食、矿砂、水泥、煤等散体物料。散体的力学性质不同于液体。1895 年德国学者 Janssen 根据 2 个基本假定导出了筒仓仓壁静压力公式。这 2 个基本假定是:1)相同深度的垂直压力 P_V 是均匀分布的;2)水平压力 P_H 和垂直压力 P_V 之比(通称压力比)k 是常数。Janssen 公式为

$$P_H=\frac{\gamma R}{2\mu}(1-e^{-k\mu Z/R}) \tag{1}$$

$$P_V=P_H/k \tag{2}$$

收稿日期:1995-09-18

①冯云田,北京清华东路 17 号中国农业大学(东校区)75 信箱,100083

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 γ 为贮料重度，μ 为贮料与仓壁间的摩擦因数，R 为筒仓半径，Z 为从贮料表面起算的深度。

Janssen 公式形式简洁，且反映了仓壁压力分布的基本特征。直至今日，多数国家的筒仓设计规范仍然以 Janssen 公式作为仓壁压力计算的依据[2,3]。细致研究后可以发现，在 Janssen 公式推导中，没有考虑到仓壁的可变形性，实际上假定了仓壁是刚性的。对于钢筋混凝土仓，可以认为仓壁是刚性的。大约从 50 年代以来，金属板仓大量出现，其仓壁较薄，刚度较小，属柔性仓。近 20 年来，国外不少学者一直在研究柔性仓的仓壁压力计算方法。由于问题的复杂性，一般都采用数值方法，如有限元法[3~5]。这些数值方法比较复杂，不便于在工程设计中应用。本文中对 Janssen 的基本假定作了某些修正，考虑到仓壁的可变形性，导出了适用于柔性仓仓壁压力分布的计算公式。新的公式保持了 Janssen 公式的简洁性，但又反映了仓壁刚度对压力分布的影响。

1 修正的 Janssen 公式的推导

通过对数值方法给出的柔性仓压力分布结果的分析可以发现，Janssen 的第 1 个基本假定是合理的，即同一深度的垂直压力 P_V 变化很小。此外，仓壁内力以膜力为主，弯矩基本上为零，处于“无矩状态”，只有在筒仓底部，由于边缘效应，有较大的弯矩。因此提出如下 2 个基本假定：1）同 Janssen 基本假定 1）；2）筒仓仓壁压力可用膜力理论分析。

假定 σ_r，σ_θ 和 σ_Z 分别为径向、周向和垂直方向的正应力，下标（或上标）w 表示仓壁，下标（或上标）s 表示靠近仓壁的贮料。贮料中的水平压力为 P_H，垂直压力为 P_V，见图 1(a)，则有

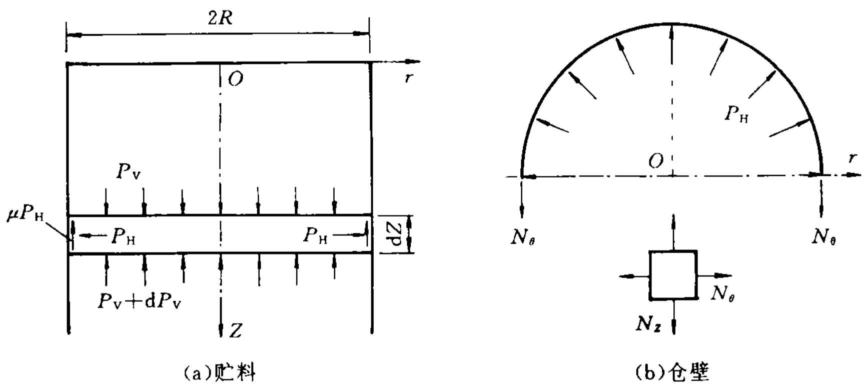


图 1 修正 Jassen 公式的推导

$$\sigma_r^s=\sigma_\theta^s=-P_H,\quad \sigma_Z^s=-P_V \tag{3}$$

周向应变

$$\varepsilon_\theta^s=\frac{1}{E_s}[\sigma_\theta^s-\nu_s(\sigma_r^s+\sigma_Z^s)]=\frac{1}{E_s}[P_V\nu_s-(1-\nu_s)P_H] \tag{4}$$

其中 E_s 为贮料的弹性模量，ν_s 为贮料的 Poisson 比。

对于仓壁，膜力 N_Z 和 N_θ 可以表示为

$$N_\theta=\sigma_\theta^w t,\quad N_Z=\sigma_Z^w t \tag{5}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 t 为仓壁厚度。由仓壁半圆环的平衡(见图 1(b))可得

$$N_\theta = P_H R \tag{6}$$

由仓壁在垂直方向的平衡给出

$$N_Z = -\int_0^Z \mu P_H \mathrm{d}Z \tag{7}$$

根据膜力理论,仓壁的周向应变

$$\varepsilon_\theta^w = \frac{1}{E_w}(\sigma_\theta^w - \nu_w \sigma_Z^w) = \frac{1}{E_w t}(N_\theta - \nu_w N_Z) \tag{8}$$

在轴对称情况下,$\varepsilon_\theta = u_r/r$,其中 u_r 为径向位移。在仓壁处,有 $u_r^s = u_r^w$,所以 $\varepsilon_\theta^s = \varepsilon_\theta^w$。由式(4)和(8)得到

$$\frac{1}{E_s}[P_V \nu_s - (1-\nu_s)P_H] = \frac{1}{E_w t}(N_\theta - \nu_w N_Z) \tag{9}$$

将式(6)和(7)代入式(9),得

$$\nu_s P_V - (1-\nu_s)P_H = \frac{E_s R}{E_w t}\left(P_H + \frac{\mu\nu_w}{R}\int_0^Z P_H \mathrm{d}Z\right) \tag{10}$$

引入参数

$$\alpha \equiv E_s R / E_w t \tag{11}$$

式(10)两边关于 Z 求导,得

$$\nu_s \frac{\mathrm{d}P_V}{\mathrm{d}Z} - (1+\alpha-\nu_s)\frac{\mathrm{d}P_H}{\mathrm{d}Z} - \frac{\alpha\mu\nu_w}{R}P_H = 0 \tag{12}$$

由厚度为 $\mathrm{d}Z$ 的贮料薄层在垂直方向的平衡(见图 1(a))可给出

$$\frac{\mathrm{d}P_V}{\mathrm{d}Z} = \gamma - \frac{2\mu}{R}P_H \tag{13}$$

将式(13)代入式(12),得

$$c_1 \frac{\mathrm{d}P_H}{\mathrm{d}Z} + \frac{c_2}{R}P_H - \nu_s \gamma = 0 \tag{14}$$

其中 $c_1 = 1+\alpha-\nu_s$,$c_2 = (2\nu_s + \alpha\nu_w)\mu$。引入量纲为 1 的参数

$$z \equiv \frac{Z}{R},\quad p_h \equiv \frac{P_H}{\gamma R},\quad p_v \equiv \frac{P_V}{\gamma R} \tag{15}$$

式(13)和(14)可写成量纲为 1 的形式

$$\frac{\mathrm{d}p_v}{\mathrm{d}z} = 1 - 2\mu p_h \tag{16}$$

$$c_1 \frac{\mathrm{d}p_h}{\mathrm{d}z} + c_2 p_h - \nu_s = 0 \tag{17}$$

积分式(17),并考虑到顶面处 $z=0$,$p_h=0$,得

$$p_h(z) = c_3[1-\exp(-c_4 z)] \tag{18}$$

其中 $c_3 = \nu_s/c_2$,$c_4 = c_2/c_1$。积分式(16)得

$$p_v(z) = c_5 z + c_6[1-\exp(-c_4 z)] \tag{19}$$

其中 $c_5 = \alpha\nu_w/(2\nu_s+\alpha\nu_w)$,$c_6 = 2\mu c_3/c_4$。式(18)和(19)即为修正的 Janssen 公式。将参数 $c_1 \sim c_4$ 代入式(18)得

$$p_h(z) = \frac{\nu_s}{(2\nu_s+\alpha\nu_w)\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{2\nu_s+\alpha\nu_w}{1+\alpha-\nu_s}\mu z\right)\right] \tag{20}$$

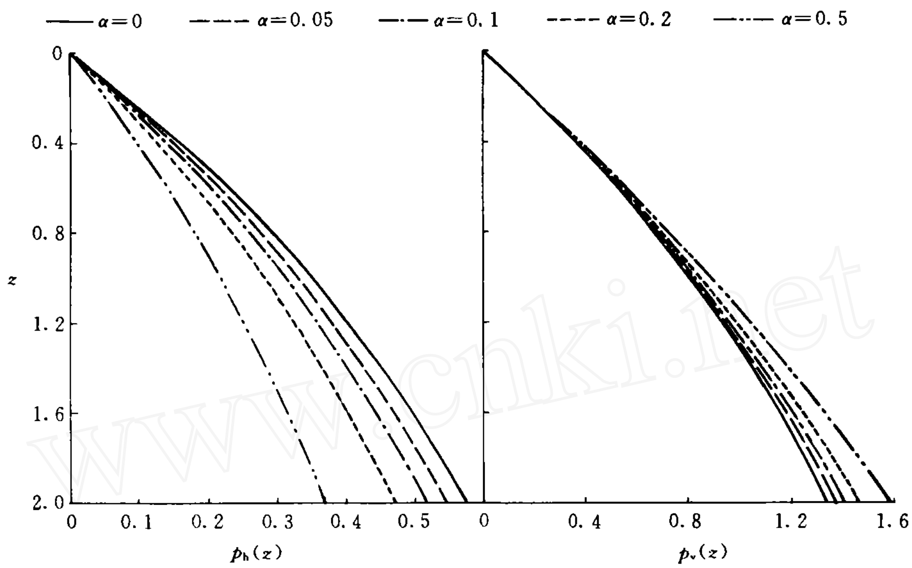
为了对照起见,将式(1)和(2)也写成量纲为 1 的形式

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$p_h=\frac{1}{2\mu}[1-\exp(-2k\mu z)],\quad p_v=p_h/k \tag{21}$$

2 仓壁刚度对压力分布的影响

式(20)中，$\alpha(\equiv E_sR/E_wt)$反映了贮料与仓壁的刚度比。若 $\alpha=0$，此仓壁为刚性仓壁；随着 α 增大，仓壁的柔性增大。对于 $\mu=0.5$，$\nu_s=\nu_w=0.3$，图 2(a)和(b)给出了 $\alpha=0$，0.05，0.1，0.2 和 0.5 时 p_h 和 p_v 随 z 的变化情况，显然仓壁水平压力 p_h 随着 α 的增大而减小。



(a) $p_h(z)$　　(b) $p_v(z)$

图 2　α 对 p_h 和 p_v 的影响

图 3 为 $z=1.0$，2.0 和 3.0 时 p_h 随 α 的变化情况。可以看到，当 $\alpha=0.1\sim1.0$ 时，不同深度处的 p_h 都有较大幅度的下降，其中又以 $z=3$ 的曲线下降为最甚。目前常用的金属板仓，α 在 0.01～0.2 之间变化，因此考虑仓壁刚度的影响是有现实意义的。

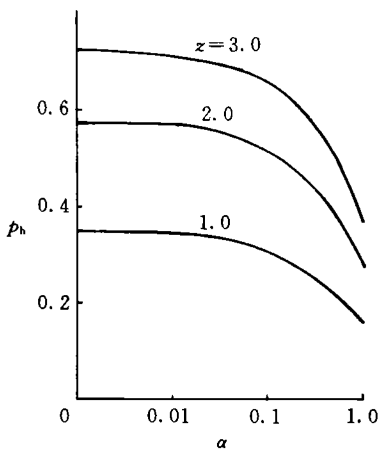


图 3　不同深度的 p_h 随 α 的变化

3 关于压力比 k 的讨论

Janssen 公式推导中的第 2 个基本假定是压力比 k 为常数。有了这个假定，才能导出 Janssen 公式，但是，k 是不是常数？如果是常数，应当等于多少？长期以来这个问题引起了众多筒仓设计师和学者的兴趣[6~8]。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

根据本文中导出的式(18)和(19)可得

$$k=c_3[1-\exp(-c_4z)]\{c_5z+c_6[1-\exp(-c_4z)]\}^{-1} \tag{22}$$

式(22)表明,在一般情况下,k 是 z 的函数,即不是常数。影响 k 的因素很多,有 α,ν_s,ν_w 和 μ 等。

若 $\alpha=0$(即刚性仓),将有关参数代入式(22),得

$$k=\nu_s/(1-\nu_s) \tag{23}$$

这表明,对于刚性仓,若贮料是理想弹性体,则压力比 k 是常数,其值取决于贮料的 Poisson 比。目前常见的 k 的取值有 $k=(1-\sin\varphi)/(1+\sin\varphi)$,$k=1-\sin\varphi$[2],$k=0.4$[8]3 种,其中 φ 为贮料的内摩擦角。

一般材料的 Poisson 比多为 0.3。若取 $\nu_s=0.3$,则由式(23)给出 $k=0.43$。这个数值同 Janike 等人给出的 $k=0.4$ 十分接近。

如果 $\alpha\neq0$,则 k 随 z 变化。数值计算表明,当 $\alpha<0.1$ 时,k 值随 z 的增大而略有减小。当 $\alpha>0.1$ 时,k 的减少幅度较大。

参 考 文 献

1 华云龙,冯云田. 农业料仓中的某些力学问题. 见:中国力学学会办公室,中国农业工程学会办公室编. 力学与农业工程. 北京:科学出版社,1994. 134～145

2 Safarian S S,Harris E C. Design and construction of silos and bunkers. [s. l.]:van Nostrand Reinhold Company,1985. 39～56

3 Abdel-Sayed G,Monasa F,Siddall W. Cold-formed steel farm structures,Part I:Grain bins. J Struc Eng,1985,111(10):2065～2089

4 Ooi J Y,Rotter J M. Wall pressures in squat steel silos from simple finite element analysis. Computer and Structures, 1990,37(4):361～374

5 Zhang Q,Puri V M,Manbeck H B,et al. Finite element model for predicting static and thermally induced bin pressures. Trans ASAE,1987,30(6):1797～1806

6 Cowin S C. The pressure ratio in the theory of bin pressures. Journal of Applied Mechanics,1979,46:524～528

7 Williams J C,Al-Salman D,Birks A H. Measurement of static stresses on the wall of a cylindrical container for particulate solids. Powder Technology,1987,50:163～173

8 Jenike A W,Johanson J R,Carson J W. Bin loads-Part 3:Mass flow bins. J Eng Industry,1973,95(1):6～12

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net