

梁的有限变形完整理论及有限元列式

李明瑞^①

(基础科学部)

摘要 在历史上第一次提出了梁的有限变形的完整理论,抛弃了小位移、小应变、小转角、小加载步长等一切近似假设。利用这套理论可以精确地描述梁系结构的几何非线性行为,绝大多数情况下可以通过一次加载求得几何非线性问题的解。

关键词 梁;有限变形;有限元;完整理论

中国分类号 O343.5

Complete Finite Deformation Theory of Beam and Its Finite Element Formulation

Li Mingrui

(Department of Basic Sciences)

Abstract The complete finite deformation theory of beam is first proposed, which abandones all kinds of simplification such as the assumption of small displacement, small normal strain, small shearing strain, small rotation, or even small loading step. This complete theory can be used to describe the nonlinear behavior of beam structure precisely and perfectly. Therefore, in most cases the nonlinear geometric solution can be obtained by using only one loading step.

Key words beam; finite deformation; finite element; complete theory

杆单元及二维和三维连续体的几何非线性理论已十分成熟,可以精确地描述这类结构的有限变形;但实际应用于使用十分广泛的梁系结构却不然。有关梁系结构的研究文章极多^[1~15],这些文章分别提出了在不同小变形假设下的梁的有限元模型,如用小应变、小加载步长假设,或大应变、小转动假设来描述大转动,以及基于以上假设的细长梁 Bernoulli 理论和考虑剪切效应的 Timoshenko 梁理论;还提出了不同算法如 TL, UL, CR 算法等^[16~20]。不同假设、不同理论、不同算法也就导致了不同的结果。对于没有解析解的问题很难评论孰优孰劣。TL 算法和 UL 算法在理论上本应是等价的^[16],但许多作者却认为用于梁的计算时 TL 法不如 UL 法^[1],更有许多研究者的计算实践表明 TL 法将会给出错误结果^[17~20]。究其原因,那就是迄今尚未提出一套完整的能描述梁的非线性行为的精确的有限变形理论。另外从研究结构的屈曲

收稿日期:1995-12-28

①李明瑞,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)75信箱,100083

分析中发展一套强有力的弧长算法,可以全程追踪解曲线的平衡路径^[21~26],但是这种算法应用在梁系结构上会出现不少问题,这是因为弧长算法是一种自动步长增量算法,当步长增量较大时将破坏各种小变形假设,也就可能导致谬误结论。

本文将以二维梁为例,介绍笔者提出的完整的梁的有限变形精确理论,并以 TL 法为例推导出梁单元的有限元列式,最后给出 2 个严格的数值考题,以证明本文理论的正确性,也说明 TL 算法仍是强有力的算法。UL 算法的列式较为复杂些,将另文给出。所得到的二维梁结果,可以容易地推广到三维梁中去,也将另文介绍。

1 梁的有限变形理论

为了书写简单及直观上更清晰明了起见,本文中仅以二维梁为例来阐述梁的有限变形理论及推导有关公式,所得结果易于推广至三维梁元上去。

图 1(a)中的梁段变形后成为图 1(b)中的梁段。以 0 与 t 来标记梁处于这 2 个位形的时刻。取 $t=0$ 时梁的中轴线为 x 轴, y 轴在横截面上并沿主方向。对二维梁不考虑梁沿 z 方向的变形。梁段变形后线段 A_0B_0 将变形至 A_1B_1 。

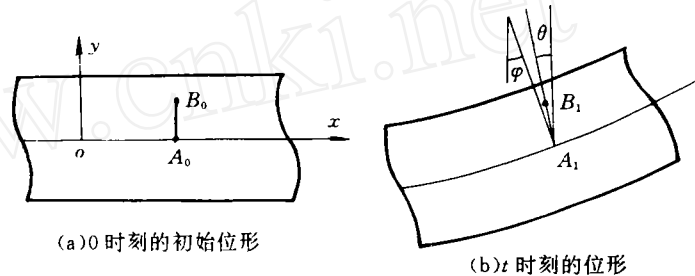


图 1 梁段变形及坐标取向示意图

基本假设 A_0B_0 与 A_1B_1 等长,即沿横截面方向的泊松比 $\nu=0$ 。由此假设可得 2 点推论:

1)弹性模量 E 与剪切模量 G 满足关系

$$E=2G$$

2)截面积 A 在变形过程中不变。

这条基本假设是本文理论所引进的唯一假设,也是所有现存简化梁理论中隐含承认的,但在大多数文献中 E 与 G 被看作是 2 个独立常数,与基本假设相悖,因此在数值计算中也就必然会引起一定的误差。为了便于在具体应用中与他人结果相比较,本文中 E 与 G 也独立出现在下面的公式推导中,但在算例中令 $E=2G$,以得到良好结果。

设线段 A_1B_1 转动了 θ 角,但并不一定垂直于变形后的中轴线。 A_0, B_0, A_1, B_1 这 4 个点的矢径分别为

$$\mathbf{r}_{A_0} = (x, 0)$$

$$\mathbf{r}_{B_0} = (x, y)$$

$$\mathbf{r}_{A_1} = \mathbf{r}_{A_0} + \mathbf{u}_{A_0}$$

$$\mathbf{r}_{B_1} = \mathbf{r}_{B_0} + \mathbf{u}_{B_0} = \mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{A}_1B_1 \quad (1)$$

其中: $\mathbf{u}_{A_0} = (u, v)$, 是位于中性轴上的点 A_0 的位移; $\mathbf{u}_{B_0} = (U, V)$, 是 $t=0$ 时横截面上任意点 B_0 的位移。由图并注意到 $v=0$, 有

$$A_1 B_1 = (-y \sin \theta, y \cos \theta)$$

把上述位移分别代入 r_{B_1} 的 2 个表达式(式(1))中,得

$$\left. \begin{aligned} U &= u - y \sin \theta \\ V &= v - y(1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这样就得到了以中性轴位移与截面转角来描述任意点位移的公式。式(2)分别对 x 和 y 求导,得

$$U_{,x} = u_{,x} - y \theta_{,x} \cos \theta$$

$$U_{,y} = -\sin \theta$$

$$V_{,x} = v_{,x} - y \theta_{,x} \sin \theta$$

$$V_{,y} = -(1 - \cos \theta)$$

于是可得到描述梁的有限变形的拉格朗日应变

$$E_{xx} = U_{,x} + (U_{,x}^2 + V_{,x}^2)/2 = u_{,x} + (u_{,x}^2 + v_{,x}^2)/2 + y^2 \theta_{,x}^2/2 - y \theta_{,x} r_{es} \quad (3a)$$

$$E_{xy} = U_{,y} + V_{,x} + U_{,x} U_{,y} + V_{,x} V_{,y} = r_{en} \quad (3b)$$

$$E_{yy} = V_{,y} + (U_{,y}^2 + V_{,y}^2)/2 = 0 \quad (3c)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_{es} &= (1 + u_{,x}) \cos \theta + v_{,x} \sin \theta \\ r_{en} &= v_{,x} \cos \theta - (1 + u_{,x}) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)与式(4)均为第一次提出。现在讨论有关各式的几何意义。

定义 $r_e = 'ds / {}^0 ds$, 表示一个在 0 时刻长为 ${}^0 ds$ 的微线段到 t 时刻(长为 $'ds$)的相对伸长。现取 ${}^0 ds = dx$, 则有

$$'ds^2 = (dx + du)^2 + dv^2$$

于是可得

$$r_e = [(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2]^{1/2}$$

另外,可以求出在 t 时刻中性轴上 A_1 的切向量

$$r_x = (1 + u_{,x}, v_{,x})$$

显然 r_x 的方向沿中轴线的切线,其长度为 r_e 。这个切向量描述了中轴线的变形。令 φ 为该切向量与 x 轴的夹角,当然 φ 也就是垂直于中轴线的法线与 y 轴的夹角,可有

$$\tan \varphi = v_{,x} / (1 + u_{,x})$$

于是

$$\sin \varphi = v_{,x} / r_e$$

$$\cos \varphi = (1 + u_{,x}) / r_e$$

由此式(4)也可写成

$$r_{es} = r_e \cos \varphi \cos \theta + r_e \sin \varphi \sin \theta = r_e \cos(\varphi - \theta)$$

$$r_{en} = r_e \sin \varphi \cos \theta - r_e \cos \varphi \sin \theta = r_e \sin(\varphi - \theta)$$

引进记号 $\gamma = \varphi - \theta$ (见图 1), 它表示了变形后的截面偏离法向的角度,亦即为剪切角。梁的 Bernoulli 理论认为截面转动后仍沿法向,即 $\gamma = \varphi - \theta = 0$, 而在有限变形理论中则应更精确地表述为

$$v_{,x}\cos\theta - (1 + u_{,x})\sin\theta = 0 \quad (5)$$

式(5)可称为有限变形理论中的 Bernoulli 条件,不满足式(5)的梁称为 Timoshenko 梁。同时注意到当式(5)成立时将有

$$r_{es} = r_e$$

对精确公式(3)作各种线性化假设,例如令 $\sin\theta=0, \cos\theta=1, u_{,x}^2=0, v_{,x}^2=0, r_{es}=1$ 或 $r_{es}=1+u_{,x}$, 等等,可得到现有的各种非线性梁元,但用这样的简化关系在载荷增量步长很小时可以近似地用 UL 法来求解,因为这样得到的增量位移亦是很小的,当然积累误差不可避免,步长越大,误差越大,步数越多,积累误差越大,所以只能得到粗糙的近似解。TL 法利用的是总位移,以上近似关系不能成立,这就是 TL 法在梁的近似理论中失败的原因。

2 虚功方程与有限元列式

虚功方程可表述为

$$\delta W^{(i)} = \delta W^{(e)} \quad (6a)$$

其中记号 $\delta W^{(i)}$ 与 $\delta W^{(e)}$ 分别表示一个处于平衡状态的物体上的内力虚功与外力虚功。以 P 表示外力, δq 表示节点虚位移,则有

$$\delta W^{(e)} = \delta q^T P \quad (6b)$$

在有限变形时, Lagrange 虚应变与第二类 Kirchhoff 应力满足能量共轭关系。二维梁元的内力虚功可表示为

$$\delta W^{(i)} = \int_v (S_{xx}\delta E_{xx}^T + S_{xy}\delta E_{xy}^T) dv \quad (6c)$$

其中 Kirchhoff 应力 S_{xx} 和 S_{xy} 与 Lagrange 应变满足本构关系

$$S_{xx} = EE_{xx}, \quad S_{xy} = GE_{xy} \quad (6d)$$

下面以 0 时刻的初始位形为参考位形,推导 t 时刻有关变量所应满足的方程,这就是 TL 法,并且将不给出任何时刻标记。

导出式(6c)中 δE_{xx} 与 δE_{xy} 的公式前,先求出对式(4)的变分,有

$$\delta r_{es} = \cos\theta\delta u_{,x} + \sin\theta\delta v_{,x} + r_{en}\delta\theta_{,x}$$

$$\delta r_{en} = -\sin\theta\delta u_{,x} + \cos\theta\delta v_{,x} - r_{es}\delta\theta$$

则有

$$\delta E_{xx} = A_{xx}\delta e \quad (7a)$$

$$\delta E_{xy} = A_{xy}\delta e \quad (7b)$$

其中

$$e = (u_{,x}, v_{,x}, \theta_{,x}, \theta)^T$$

$$A_{xx} = (1 + u_{,x} - y\theta_{,x}\cos\theta, v_{,x} - y\theta_{,x}\sin\theta, y^2\theta_{,x} - yr_{es}, -y\theta_{,x}r_{en})$$

$$A_{xy} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0, -r_{es})$$

以下可有 2 种选择,即选择 Bernoulli 梁理论或 Timoshenko 梁理论。在线性情况下, Bernoulli 条件(5)可简化成

$$v_{,x} - \theta = 0$$

因此 θ 不必独立插值,但在有限变形理论中这显然是不行的。即使式(5)成立,也必须对 u, v, θ 进行独立插值,自然只能选择 Timoshenko 梁理论。当然也可这么理解,将式(5)作为一个强加约束条件,而把变分问题看作是以剪切模量 G 为 λ 乘子的泛函的条件变分问题,把剪切能看作是一个附加的惩罚值,那么这仅是一种说法而已,所以在这个意义下,两种不同的梁理论是统一的。

设对位移 u, v, θ 选定了插值函数

$$u = H_u q$$

$$v = H_v q$$

$$\theta = H_\theta q$$

引进记号 H , 使有

$$\delta e^T = H \delta q$$

当 u, v, θ 选用相同类型的插值函数时, H 将取如下形式:

$$H = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & N_{i,x} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots & 0 & N_{i,x} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_{,x} & \cdots & 0 & 0 & N_{,x} & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_1 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_{\text{node}}$$

其中 $N_{i,x}$ 表示对自变量取导数, n_{node} 是一个单元的节点数。

于是式(7a)和(7b)可进一步表示为

$$\left. \begin{aligned} \delta E_{xx} &= A_{xx} H \delta q = B_{xx} \delta q \\ \delta E_{xy} &= A_{xy} H \delta q = B_{xy} \delta q \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式(8)代入式(6),并利用节点虚位移可在满足约束条件下任意选取这个事实,便得出平衡方程

$$F(q) = \int (B_{xx}^T S_{xx} + B_{xy}^T S_{xy}) dv - P = 0 \quad (9)$$

另外,还可引进 Kirchhoff 内力

$$\left. \begin{aligned} N &= \int S_{xx} dA \\ Q &= \int S_{xy} dA \\ M &= \int S_{xx} dA \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式(3)和(6)代入式(10)可得

$$N = EA(u_{,x} + u_{,x}^2/2 + v_{,x}^2/2) + EI\theta_{,x}^2/2 \quad (11a)$$

$$Q = GA_s[v_{,x} \cos \theta - (1 + u_{,x}) \sin \theta] \quad (11b)$$

$$M = -EI\theta_{,x} r_{cs} \quad (11c)$$

其中 A_s 为剪切有效面积,是由于截面上 S_{xy} 不均匀分布而引入的。式(9)与(11)分别是有限元形式的平衡方程与截面内力平衡方程。在式(11a)的轴力中前面括弧内的3项是轴线拉伸变形和位移引起的,后1项则是截面作刚性转动时产生的。在式(11c)中 r_{cs} 是由中性轴线拉伸变形(r_c)与剪切变形($\cos \gamma$)联合作用引起的,也可看作是一个对曲率 $\theta_{,x}$ 的修正,这一项对弯矩的影

响还是第一次被注意到。表达式(11b)则是剪切力 Q 的完整表达式,适合于作任意大角度转动的情况。这就是完整有限变形理论的优越性。

3 有限元平衡方程的牛顿解法与切线刚度

对于有限元平衡方程(9),可用牛顿切线法通过迭代求解,方法概述如下。将式(9)作 Taylor 级数展开,有 $F(q+\delta q)=F(q)+\delta F+\delta q$ 的高次项等于0。忽略 δq 的高次项,并记

$$\delta F = K_T \delta q \quad (12a)$$

于是利用 $F(q)$ 的表达式(9),有

$$K_T \delta q = -F(q) = P - \int B_{xx}^T S_{xx} dv - \int B_{xy}^T S_{xy} dv \quad (12b)$$

K_T 称为切线刚度阵。由式(12a)将 δF 具体写出有

$$\delta F = \int (\delta B_{xx}^T S_{xx} + B_{xx}^T \delta S_{xx}) dv + \int (\delta B_{xy}^T S_{xy} + B_{xy}^T \delta S_{xy}) dv$$

由式(8)看出 B_{xx} 和 B_{xy} 中的 H 是插值函数矩阵,不参与变分,只要求出 δA_{xx}^T 与 δA_{xy}^T 就可以了。可有

$$\delta A_{xx}^T = F_{xx} H \delta q$$

$$\delta A_{xy}^T = F_{xy} H \delta q$$

其中

$$F_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & & & \text{对} \\ 0 & 1 & & \text{称} \\ -y \cos \theta & -y \sin \theta & y^2 & \\ y \theta_{,x} \sin \theta & -y \theta_{,x} \cos \theta & -y r_{en} & y \theta_{,x} r_{ex} \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$F_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & & & \text{对} \\ 0 & 0 & & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & -r_{en} \end{bmatrix} \quad (13b)$$

积分过程中将会出现 $\int y dA$, $\int y^2 dA$, $\int y^3 dA$, $\int y^4 dA$ 这4个积分项。当中性轴通过截面形心时, $\int y dA = 0$ 。 $\int y^2 dA$ 是截面的惯性矩 I 。当截面对称于中性层时积分 $\int y^3 dA$ 也为0,否则应予考虑。 $\int y^4 dA$ 在有限变形理论中才出现,对于矩形截面, $\int y^4 dA = I_4 = bh^5/80$ 。在具体计算时,用式(11)代入可作适当简化,此处省略。再将关系

$$\delta S_{xx} = E \delta E_{xx} = E B_{xx} \delta q$$

$$\delta S_{xy} = G \delta E_{xy} = G B_{xy} \delta q$$

代入 δF 的表达式,最后切线刚度阵可写成

$$K_T = K_{xx} + K_{xy} + K_\sigma + K_\tau \quad (14a)$$

其中

$$K_{xx} = E \int B_{xx}^T B_{xx} dv \quad (14b)$$

$$K_{xy} = G \int B_{xy}^T B_{xy} dv \quad (14c)$$

$$K_\sigma = E \int H^T F_{xx} E_{xx} H dv \quad (14d)$$

$$K_\tau = G \int H^T F_{xy} E_{xy} H dv \quad (14e)$$

迭代过程中每一次求出 $\delta q^{(i)}$ 后,可立刻进行位移更新,即

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} + \delta q^{(i)}$$

用牛顿切线法在进入牛顿吸引区后可观察到明显的平方收敛率,但当初值与终值相差甚远时,可能发散。

4 单元与数值积分的选择

由于我们选择了 Timoshenko 梁理论,对 u, v, θ 分别插值,可以得出二节点、三节点、四节点、五节点等几种梁单元。其中除二节点元由于是线性插值,要求梁的中轴线始终保持为直线,因而破坏了节点处转角的连续条件,是一种不可取的单元外,其他均可供选择。

有限变形梁元在小变形时或在一次加载不作迭作时应自动退化成常见的线性梁元。线性情况下的 Bernoulli 梁元是用三次函数构造的,在仅有节点载荷时它在理论上可给出精确解;所以理想的有限变形梁元亦应选用三次或三次以上的插值函数来构造,这样三节点梁元亦应排除。四节点与五节点的插值函数不难自行构造,这里不再列出。

式(12)和(14)的各式中均含有插值多项式与 $\cos\theta, \sin\theta$ 乘积的积分,域内的 θ 也是由插值得出的,不可能求得显式积分,因而只能采用数值积分。在数值试验中发现沿梁轴线少于5点的 Gauss 积分精度很差,甚至发散。当采用多于5点的数值积分时均没有提高数值计算的精度;因此对于有限变形梁元建议一律采用五点 Gauss 积分。

5 数值算例

本文中只给出2个简单但却极为严格的考题,目的在于证明本文理论的正确性,而不在于计算具体的结构问题。计算中一律采用如下数据:截面尺寸 $b=1, h=6, L=432, E=12$;悬臂梁总节点数分为13点与25点2种情况,每种情况下又分别选用三节点元、四节点元与五节点元,共6种方案。允许误差 $\epsilon=1.0 \times 10^{-9}$,收敛条件为 $r_u < \epsilon, r_f < \epsilon$,其中 $r_u = \|\Delta u\|/\|u\|$,是位移增量与总位移的欧几里得模之比; $r_f = \|\Delta r\|/\|\Delta P\|$,是不平衡力与加载步载荷增量的欧几里得模之比。这样相当于能量模为 1.0×10^{-18} 。

考题 1 梁左端给予 $u=v=0$ 的约束,另在左端点给以指定位移,使梁作刚性转动 2π 后回归原位。每次转角 $\Delta\theta = \pi/2$,分4次旋转回位。本文设计的三、四、五节点元均能顺利通过考题,且旋转 2π 后没有丝毫变形。在计算中曾试验一次旋转 $\Delta\theta = \pi$,但告失败。分析原因,应是初值逸出牛顿吸引区之故。不妨称 $\Delta\theta = \pi/2$ 是本例中牛顿迭代法的极限加载步长。

考题 2 左端给予 $u=v=\theta=0$ 的约束条件,右端给一集中弯矩 M 。当 $M = M_{cr} = 2\pi EI/L$ 时理论上该直梁应弯曲成一封闭圆,即右端点应有终值 $u=v=0, \theta=2\pi$ 。计算中取

$$\Delta M = M_{cr}/4$$

分4次加载而弯成一封闭圆。计算结果列于表1和表2。其中 $\Delta u/L$ 与 $\Delta v/L$ 是右端点位移误差, $\Delta\theta/2\pi$ 是转角误差($\Delta\theta = \theta - 2\pi$),均为相对误差。

表1 总节点数为13时的计算结果

单元类型	单元总数	$\Delta u/L$	$\Delta v/L$	$\Delta\theta/2\pi$	每一加载步的迭代次数
三节点元	6	0.06	0.6	0.5	14
四节点元	4	0.056	0.009	0.054	17
五节点元	3	2.3×10^{-3}	1.6×10^{-5}	2.3×10^{-4}	18

表2 总节点数为25时的计算结果

单元类型	单元总数	$\Delta u/L$	$\Delta v/L$	$\Delta\theta/2\pi$	每一加载步的迭代次数
三节点元	12	0.17	0.106	0.186	16
四节点元	8	9.3×10^{-4}	2.3×10^{-6}	9.2×10^{-4}	18
五节点元	6	2.1×10^{-3}	1.4×10^{-5}	2.2×10^{-4}	18

以上结果说明,四节点元与五节点元均有极好精度;三节点元不能令人满意,但随着网格的加密,精度亦能提高。与考题1类似,当 $\Delta M > M_{cr}/4$ 时计算发散,因此 $M_{cr}/4$ 是本算例的牛顿迭代极限加载步长。另外,在以上计算中亦曾试验用小步长加载,其计算结果与大步长加载完全一致,但每加载步的迭代次数都可下降。

还曾试验用其他简化理论得出的梁元来计算以上两考题,结果如下:

- 1) TL法失败,UL法的牛顿迭代极限加载步长大大减小;
- 2) 计算结果依赖于加载步长;
- 3) 在考题1中1个单元可以通过,多个单元或告失败,或有极明显的伸长;
- 4) 考题2曾为许多研究者引用过,其误差一般用曲线表示,没查到数值误差,但仅用3个五节点元(见表1)作4次加载即能弯成圆,此为首例。

还曾对文[20]中所提供的算例进行验算。不仅用比文[20]少得多的单元就能得到很高精度,而且最值得提出的是,这些例子用本文方法均可一次加载得到,充分证明了本文方法的优越性。这说明在极大多数情况下,牛顿极限加载步长这个限制是很小的,在这个意义下,几何非线性问题解可用一次加载得到。

6 结 论

本文提出了梁类结构的完整的有限变形理论。以二维梁为例给出了TL法的有限元列式。应该指出用TL法由于在全部加载迭代计算过程中完全不需与外存储器作数据交换,大大地提高了计算速度。本文理论完全适用于三维梁元。

文中给出的2个考题完全证明了所提出理论的正确性与优越性。

牛顿迭代法存在算法固有的极限加载步长,是一个在使用本理论和方法中应注意的问题。如何确定这个极限值,在理论上还有待研究;如何用别的算法来突破这个限制也将是一个有意

义的问题。

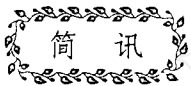
采用本文中提出的理论时推荐使用四点元或五点元及五点 Gauss 数值积分。

参 考 文 献

- 1 Bathe K J. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *Int J Numer Meth Eng*, 1979,4:961~986
- 2 Argyris J. Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading natural formulation, Part I: Quasistatic problems. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1981,26:75~123
- 3 Argyris J, et al. Finite element method—The natural approach. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1979,17/18:1~106
- 4 Argyris J. An excursion into large rotations. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1982,32:85~155
- 5 Simo J C, et al. A three dimensional finite strain rod model, Part II: Computational Aspects. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1990,79:21~70
- 6 Tezcan S, et al. Tangent stiffness matrix for space frames. *ASCE*,1969,95:1257~1270
- 7 Chu K H, et al. Large deflection buckling of space frames. *J Struct Div ASCE*, 1972,98:2701~2711
- 8 Meek J L. Geometric nonlinear analysis of space frames. In: *Proc Second Int Conf on Computer Aided Analysis and Design in Civil Eng Univ of Roorkee, India*, 1985. G20~G30
- 9 Meek J L. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an increment iterative technique. *J Comp Meth Appl Eng*, 1984,47:261~282
- 10 Hsiao K M, et al. Nonlinear finite element analysis of elastic frames. *Comp Structure*, 1987,26:693~701
- 11 Argyris J, et al. A simple theory of geometric stiffness with application to beam and shell problems. *2nd Int Symp Comp Meth Appl Sci & Engng Versatiles, Univ of Stuttgart, France*, 1975. ISD-Report No 183
- 12 Dvorkin E N, et al. On the nonlinear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *Int J Numer Meth Eng*, 1988,26:1597~1613
- 13 Cardona A, et al. A beam finite element nonlinear theory with rotation. *Int J Numer Meth Eng*, 1988,26:2403~2438
- 14 Simo J C. A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem, Part I: *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1986,58:79~115
- 15 Meek J L, et al. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an increment iterative technique. *J Comp Meth Appl Mech Eng*, 1984,47:261~282
- 16 Bathe K J. An assessment of current finite element analysis of nonlinear problems in solid mechanics. *Symp Num Solution of Partial Diff Eqns, Univ Maryland*, 1975
- 17 Hsiao K M, et al. A corotational procedure that handle large rotations of spatial beam structures. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1987,27:769~781
- 18 Crisfield M A. Corotational beam element for two and three dimensional nonlinear analysis. *IUTAM/IACN Symp Vienna, Austria*, 1989
- 19 Crisfield M A. A consistent corotational formulation for nonlinear three dimensional beam elements. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1990,81:131~150
- 20 Crivelli L A, et al. A three dimensional nonlinear Timonshenko based on the corecongruent formulation. *J Comp Meth Appl Eng*, 1993,36(21):1189~1221
- 21 Rics E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J Appl Mech*, 1979,39:

1060~1066

- 22 Wempner G A. Discrete approximations related to the nonlinear theories of solids. *Int J Solids & Struct*, 1971,7:1581~1599
- 23 Crisfield M A. A fast incremental iterative solution procedure that handles snap-through. *Comp Struct*, 1981,13:55~62
- 24 Bellini P X, et al. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equation. *Comp Struct*, 1987,26:99~110
- 25 Jeusette J P, et al. An effective automatic incremental/iterative method for static nonlinear structural analysis. *Comp Struct*, 1989,32:125~135
- 26 Li Mingrui. A new arc length method for tracing the complete load path. In: *Recent developments in finite element analysis*. Palo Alto, CA,1994. 171~180



龙运佳教授研制成混沌激振器并获专利

混沌振动即确定性激励引发的确定性系统的不确定振动。因利用简单的非线性机械系统即可得到这种具有宽频谱特性的振动,而且其振动作业的功效又往往高于简谐振动,故混沌振动的应用研究吸引了国际、国内,军方、民间的众多学者,其中美国康奈尔大学的研究开始较早,但至今尚未见有产品。

1995年我校基础科学部龙运佳教授首次研制成混沌激振器并取得中国专利。它的最大激振力达12 kN,功率为1.5 kW,能激发出具有0~800 Hz频谱的混沌振动,可作为振动压实、筛选、分离、粉碎、钻进、打桩等各种振动器械的高效振源,广泛用于工业、农业、土建、水利、军备等部门的工程作业。它的普遍应用,将是人类利用振动的一次突破性技术进步,其科学价值在于,从实践上证实了混沌振动的普遍性、可控性与可用性。