北京農業大學學報
第1卷 第1期 1955年10月

農畜的繁殖率

吳 仲 賢

一、緒 論

關於農畜的繁殖速率，即在一定年限內某種農畜能繁殖達若干頭數，現尙無簡便而正確的計算方法。畜牧工作者在建場時欲估計某種農畜在若干年內可以達若干頭數，往往費時數日，而所得之結果是否正確尙無從考核。本文之目的在求出一簡單公式算法，易於核對；同時又製定各種表格，俾不願或無暇計算之人一查即得，使此方面的問題可以獲得迅速解決。

在以前文獻中，涉及此類問題者祇有我國畜牧學家焦龍華氏（1949）。在假定母畜的留種率、繁殖率、仔畜的性比例與成活率爲某些數字，並求出淨繁殖率之後，焦氏獲得一公式：

$$S_n = P_f\ (1+r)^n,$$

在此公式中

S_n＝滿 n 年後母畜頭數，

P_f＝基本母畜數，

r ＝淨繁殖率，

n ＝年數。

此公式如稍加注意，即知其爲代數中複利的公式，蓋以基本母畜爲本金，而淨繁殖率則爲每年之利潤。因此，其基本假設爲今年出生的幼年母畜在明年又能產仔，由此類推，至n年後所獲得的母畜總數即爲S_n；但此種公式祇可應用於早熟的豬，而對於馬、牛、羊，均不合用。因此作者特演出一系列的公式，不僅可以包括焦氏的公式，而且可以應用於馬、牛、羊的計算。

二、公式的證明與計算方法

爲了準確地計算某種農畜在一定年限內能繁殖到若干頭數，所需考慮的要點爲

1．馬、牛、羊、豬的不同繁殖率，亦即每百頭某種母畜每年所能生出的仔畜數；

2. 馬、牛、羊、豬達到配種和繁殖的不同年齡。

3. 馬、牛、羊、豬的不同使用年限，即達到淘汰時所已經滿足的年限。

其他問題，如死亡率，亦影響繁殖速率，但因其不影響公式的形式，祇在以後舉例計算時論及之。他如母畜的留種率，仔畜的性比例，成活率等等因素都可以包括於淨繁殖率之內，均作同樣的處理。

羊的繁殖公式。設羊的淨繁殖率爲 r，幼小母羊出生後隔一年始能生產小羊、（保利森科，1952），而 n 年後母羊的總數爲 u_n，則其繁殖公式爲

$$u_n=u_{n-1}+ru_{n-2}\cdots\cdots 1.0$$

如 n 超過使用年限，則須考慮淘汰問題，此時 u_n 已不能代表母羊的總數，而須減去所已淘汰的母羊部分，及由於母羊的淘汰尙未出生的仔羊部分。如以 S 代表此時的母羊總數，則

$$S_n=u_n-u_{n-(q+1)}-\Delta_n\cdots\cdots 1.1$$

在此公式中 q 爲使用年限（淘汰年齡），$u_{n-(q+1)}$ 爲所淘汰之 $q+1$ 年以前出生的母畜數，Δ_n 爲由於此等母羊的淘汰尙未出生的仔羊部分。Δ_n 的公式爲

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}+r\{\Delta_{n-2}+S_{n-(q+1)}\}\cdots\cdots 1.2$$

如將某年的 u 值與 Δ 值算出，即可求出各該年度母畜的總數 S_n，但較更簡單的公式爲

$$S_n=S_{n-1}+r\{S_{n-2}-S_{n-(q+1)}\}\cdots\cdots 1.3$$

由此公式，祇需知前一、二年的母畜總數，以及 $q+1$ 年前的總數，即可求出 n 年年度的母畜總數。茲將各公式依次證明，再述及其計算方法。

設羊的淨繁殖率 $r=0.5$（例如，每100頭母羊產仔140頭，其中半數爲母羊，同時在此數中由於一部不能成活，一部不予留種，祇有50頭達到配種與產羔），又設如羊在出生後隔一年始能產生後代，則各年中所繁殖的後代數目如下（表1）：——

表 1.

年　　數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		0	0	0	0	0	0	0	0
2			0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
3				0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4					0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
5						1.0	1.0	1.0	1.0
6							1.375	1.375	1.375
7								1.875	1.875

8									2.5625
	1 u_0	1 u_1	1.5 u_2	2.0 u_3	2.75 u_4	3.75 u_5	5.125 u_6	7.0 u_7	9.5625 u_8

由表中最末兩横行可知

$$u_2=u_1+ru_0,$$

$$u_3=u_2+ru_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad u_n=u_{n-1}+ru_{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 1.0$$

此即公式1.0之由來。由此公式可以看出，某年之母畜總數，爲前一年所有母畜，加上前兩年所有母畜所出産的。在未行淘汰已滿使用年限的母畜以前，u_n即等於S_n。在滿使用年限以後，由於淘汰，S_n即小於u_n；例如，使用年限$q=6$時，該母畜在淘汰前曾經配種和產仔5次，於是各代的母畜總數如下（表2）：——

表中括弧內的數字代表應加淘汰的母羊數。由表中可知，從第7年起，S即已不同於u。此不同的原因，部分是由於已滿使用年限的母畜被淘汰，而部分則由於這些母畜被淘汰後它們的後代便未被生出。前一部分僅需從u_n中減去，但後一部分則較爲複雜，必須先找出其遞增的規律，然後可以從u_n中減去。爲此，乃先按表2算出其前面幾代的數值如下：——

S_n	u_n	$u_n-u_{n-(q+1)}$
$S_7=5.5$	$u_7=7.0$	$u_7-u_0=6.0$
$S_8=7.5625$	$u_8=9.5625$	$u_8-u_1=8.5625$
$S_9=9.5625$	$u_9=13.0625$	$u_9-u_2=11.5625$
$S_{10}=12.34375$	$u_{10}=17.84375$	$u_{10}-u_3=15.84375$
$S_{11}=15.75$	$u_{11}=24.375$	$u_{11}-u_4=21.625$

因之，Δ_n的數值爲

$$\Delta_n=\{u_n-u_{n-(q+1)}\}-S_n$$

$$\Delta_7=u_7-u_0-S_7=0.5$$

$$\Delta_8=u_8-u_1-S_8=1.0$$

$$\Delta_9=u_9-u_2-S_9=2.0$$

$$\Delta_{10}=u_{10}-u_3-S_{10}=3.5$$

$$\Delta_{11}=u_{11}-u_4-S_{11}=5.875$$

如能求得最後一直行的級數的形成函數，則S_n的計算可告全部解決。

表2

年數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
1		0	0	0	0	0	0	0	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
2			.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)
3				.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)	(.5)
4					.75	.75	.75	.75	.75	.75	.75	(.75)	(.75)	(.75)	(.75)	(.75)	(.75)
5						1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	(1.0)	(1.0)	(1.0)	(1.0)	(1.0)
6							1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	(1.375)	(1.375)	(1.375)	(1.375)
7								1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	1.375	(1.375)	(1.375)	(1.375)
8									2.0625	2.0625	2.0625	2.0625	2.0625	2.0625	2.0625	(2.0625)	(2.0625)
9										2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	(2.5)
10											3.28125	3.28125	3.28125	3.28125	3.28125	3.28125	3.28125
11												4.15625	4.15625	4.15625	4.15625	4.15625	4.15625
12													5.296875	5.296875	5.296875	5.296875	5.296875
13														6.6875	6.6875	6.6875	6.6875
14															8.6484375	8.6484375	8.684375
15																10.9609375	10.9609375
16																	14.03515625
	1	1	1.5	2.0	2.75	3.75	5.125	5.5	7.5625	9.5625	12.34375	15.75	20.046875	25.359375	32.6328125	41.53125	53.06640625
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}

茲列出表 1 與表 2 的前面幾代的差異於下（表 3）：——

表 3

年　數	7	8	9	10	11	12
7	0.5 [ru_0]	0.5 [ru_0]	0.5 [ru_0]	0.5 [ru_0]	0.5 [ru_0]	0.5 [ru_0]
8		0.5 [ru_1]	0.5 [ru_1]	0.5 [ru_1]	0.5 [ru_1]	0.5 [ru_1]
9			1.0 [$ru_2+r^2u_0$]	1.0 [$ru_2+r^2u_0$]	1.0 [$ru_2+r^2u_0$]	1.0 [$ru_2+r^2u_0$]
10				1.5 [$ru_3+r(ru_0+ru_1)$]	1.5 [$ru_3+r(ru_0+ru_1)$]	1.5 [$ru_3+r(ru_0+ru_1)$]
11					2.375 [$ru_4+r(ru_0+ru_1+ru_2+r^2u_0)$]	2.375 [$ru_4+r(ru_0+ru_1+ru_2+r^2u_0)$]
12						3.625 [$ru_5+r(ru_0+ru_1+ru_2+r^2u_0+ru_3+r^2u_0+r^2u_1)$]
	0.5 [ru_0]	1.0 [$r(u_0+u_1)$]	2.0 [$r(u_0+u_1+u_2)+r^2u_0$]	3.5 [$r(u_0+u_1+u_2+u_3)+r^2(2u_0+u_1)$]	5.875 [$r(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4)+r^2(3u_0+2u_1+u_2)+r^3u_0$]	9.5 [$r(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)+r^2(4u_0+3u_1+2u_2+u_3)+r^3(2u_0+u_1)$]
	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}	Δ_{11}	Δ_{12}

由表 3 最末兩橫行可以看出

$$\Delta_9=\Delta_8+r\ (\Delta_7+u_2)\ ,$$

$$\Delta_{10}=\Delta_9+r\ (\Delta_8+u_3)\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \Delta_n=\Delta_{n-1}+r\{\Delta_{n-2}+u_{n-(q+1)}\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1.2a$$

同時，由於Δ_5，Δ_6均＝0，

$$\Delta_7=\Delta_6+r\ (\Delta_5+u_0)\ =ru_0=0.5$$

$$\Delta_8=\Delta_5+r\ (\Delta_6+u_1)\ =ru_0+ru_1=1.0,$$

因此，公式1.2a能代表Δ的形成方式。嘗n－（q+1）>q時，

$$\Delta_{14}=u_{14}-u_7-S_{14}=62.1328125-7.0-32.6328125=22.5,$$

$$\Delta_{15}=u_{15}-u_8-S_{15}=84.875-9.5625-41.53125=33.78125。$$

如從公式1.2a計算，則由於u在此時已變成S，於是

$$\varDelta_{14}=\varDelta_{13}+r\ (\varDelta_{12}+S_7)\ =15.0+0.5\ (9.5+5.5)\ =22.5,$$

$$\varDelta_{15}=\varDelta_{14}+r\ (\varDelta_{13}+S_8)\ =22.5+0.5\ (15.0+7.5625)\ =33.78125,$$

而

$$\varDelta_{14}=\varDelta_{13}+r\ (\varDelta_{12}+u_7)\ =15.0+0.5\ (9.5+7.0)\ =23.25\neq 22.5,$$

$$\varDelta_{15}=\varDelta_{14}+r\ (\varDelta_{13}+u_8)\ =22.5+0.5\ (15.0+9.5625)$$

$$=34.78125\neq 33.78125$$

因此，公式1.2a之眞正形式爲

$$\varDelta_n=\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-2}+S_{n-(q+1)}\},\ \cdots\cdots 1.2$$

因當n－（q+1）≦q時，$u_{n-(q+1)}=S_{n-(q+1)}$也。

由於$\varDelta_n$的形成規律之發現，公式 1.1 於是可以求解。

但公式 1.1

$$S_n=u_n-u_{n-(q+1)}-\varDelta_n$$

又可以寫爲

$$S_n=(u_{n-1}+ru_{n-2})-\{u_{n-(q+1)-1}+ru_{n-(q+1)-2}\}$$

$$-[\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-2}+S_{n-(q+1)}\}]=\{u_{n-1}-u_{n-(q+1)}-\varDelta_{n-1}\}$$

$$+r\{u_{n-2}-u_{n-(q+1)-2}-\varDelta_{n-2}\}-rS_{n-(q+1)}$$

$$=S_{n-1}++r\{S_{n-2}-S_{n-(q+1)}\},\ \cdots\cdots 1.3$$

因此，公式1.3獲得證實。此公式在n＞q+1時完全合用，而當n=q+1時，由於S_q及S_{q-1}實際上等於u_q及u_{q-1}，S_n必須直接由公式1.1及1.2求得。

由公式1.3的形式可以看出，祇需知道淨繁殖率r及使用年限q，在求得q以上的頭幾個S值後，即可算出逐年的母畜總數至任何需要的年代。事實上，由於$u_1=u_0$，祇S_{q+1}不能利用公式1.3，而S_{q+2}及以後的S都可以由此公式求得。此外，由於公式中已不包含u與$\varDelta$，後代中的S可直接由已往的祖先求得，因此S_n的計算極爲簡便。

牛的繁殖公式。設牛的淨繁殖率爲r，而小母牛出生後隔兩年始能生產小牛（約一齡半時配種）（保利森科，1952）則其繁殖公式爲

$$u_n=u_{n-1}+ru_{n-3}\ \cdots\cdots 2.0$$

同樣，如n超過使用年限q，則母牛總數S_n可自公式1.1求得。此時

$$\varDelta_n=\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-3}+S_{n-(q+1)}\},\ \cdots\cdots 2.1$$

因而

$$S_n=S_{n-1}+r\{S_{n-3}-S_{n-(q+1)}\}\ \cdots\cdots 2.2$$

今試一一證明之。

當r=0.3，而第一次產仔年齡p=3時，各年所繁殖的母牛數如下（表4）：—

表4

年　數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2			0	0	0	0	0	0	0	0	0
3				0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
4					0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
5						0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
6							0.39	0.39	0.39	0.39	0.39
7								0.48	0.48	0.48	0.48
8									0.57	0.57	0.57
9										0.687	0.687
10											0.831
	1 u_0	1 u_1	1 u_2	1.3 u_3	1.6 u_4	1.9 u_5	2.29 u_6	2.77 u_7	3.34 u_8	4.027 u_9	4.858 u_{10}

由上表可見

$$u_3 = u_2 + ru_0,$$

$$u_4 = u_3 + ru_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad u_n = u_{n-1} + ru_{n-3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2.0$$

設使用年限$q=12$，則配種和產仔次數為10；滿此年齡的母牛就必須淘汰。於是各年所繁殖的母牛數S_n如下表所列：——

表5

年　數	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	1	1	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
1	0	0	0	0	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
2	0	0	0	0	0	(0)	(0)	(0)	(0)
3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	(0.3)	(0.3)	(0.3)
4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	(0.3)	(0.3)
5	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	(0.3)
6	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39
7	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48
8	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57
9	0.687	0.687	0.687	0.687	0.687	0.687	0.687	0.687	0.687
10	0.831	0.831	0.831	0.831	0.831	0.831	0.831	0.831	0.831
11		1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002

12			1.2081	1.2081	1.2081	1.2081	1.2081	1.2081	1.2081
13				1.1574	1.1574	1.1574	1.1574	1.1574	1.1574
14					1.458	1.458	1.458	1.458	1.458
15						1.82043	1.82043	1.82043	1.82043
16							2.07765	2.07765	2.07765
17								2.42505	2.42505
18									2.881179
	4.858	5.86	7.0681	7.2255	8.6835	10.50393	12.28158	14.40663	16.987809
	u_{10}	u_{11}	u_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}	S_{17}	S_{18}

由表4及公式2.0可以算出

u_n	S_n	$u_n-u_{n-(q+1)}$
$u_{13}=8.5255$	$S_{13}=7.2255$	$u_{13}-u_0=7.5255$
$u_{14}=10.2835$	$S_{14}=8.6835$	$u_{14}-u_1=9.2835$
$u_{15}=12.40393$	$S_{15}=10.50393$	$u_{15}-u_2=11.40393$
$u_{16}=14.96158$	$S_{16}=12.28158$	$u_{16}-u_3=13.66158$
$u_{17}=18.04663$	$S_{17}=14.40663$	$u_{17}-u_4=16.44663$
$u_{18}=21.767809$	$S_{18}=16.987809$	$u_{18}-u_5=19.867809$

因之，Δ_n爲

$$\varDelta_{13}=u_{13}-u_0-S_{13}=0.3$$

$$\varDelta_{14}=u_{14}-u_1-S_{14}=0.6$$

$$\varDelta_{15}=u_{15}-u_2-S_{15}=0.9$$

$$\varDelta_{16}=u_{16}-u_3-S_{16}=1.38$$

$$\varDelta_{17}=u_{17}-u_4-S_{17}=2.04$$

$$\varDelta_{18}=u_{18}-u_5-S_{18}=2.88$$

根據公式1.2的形式可以寫出

$$\Delta_n=\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-3}+S_{n-(q+1)}\} \qquad \cdots\cdots 2.1$$

以上面$\varDelta$之各値試之，

$$\varDelta_{16}=\varDelta_{15}+r\ (\varDelta_{13}+S_3)\ =0.9+0.3\ (0.3+1.3)\ =1.38$$

$$\varDelta_{17}=\varDelta_{16}+r\ (\varDelta_{14}+S_4)\ =1.38+0.3\ (0.6+1.6)\ =2.04。$$

同時，由於$\varDelta_{12}$，$\varDelta_{11}$，$\varDelta_{10}$均等於0，

$$\varDelta_{13}=\varDelta_{12}+r\ (\varDelta_{10}+S_0)\ =0.3,$$

$$\varDelta_{14}=\varDelta_{13}+r\ (\varDelta_{11}+S_1)\ =0.6,$$

$$\varDelta_{15}=\varDelta_{14}+r\ (\varDelta_{12}+S_2)\ =0.9,$$

因此，2.1能完全代表$\varDelta$各值遞增的方式。

$$\therefore\ S_n=S_{n-1}+r\{S_{n-3}-S_{n-(q+1)}\}\cdots\cdots 2.2$$

茲以表五之S值試之，得

$$S_{16}=S_{15}+r\ (S_{13}-S_3)\ =10.50393+0.3\ (7.2255-1.3)\ =12.28158,$$

$$S_{17}=S_{16}+r\ (S_{14}-S_4)\ =12.28158+0.3\ (8.6835-1.6)\ =14.40663,$$

$$\cdots\cdots$$

因此，吾人得知公式2.2完全正確。

馬的繁殖公式。馬與牛不同之點在1.達到產仔年齡比牛更晚(p=4)（保列森科，1952），2.使用年限更長（q=15年）。設其淨繁殖率為r，根據公式1.0與2.0，可寫出馬的繁殖公式如下：——

$$u_n=u_{n-1}+ru_{n-4}\cdots\cdots 3.0$$

同時根據公式1.2與2.1，及公式1.3與2.2，

$$\varDelta_n=\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-4}+S_{n-(q+1)}\}\cdots\cdots 3.1$$

$$S_n=S_{n-1}+r\{S_{n-4}-S_{n-(q+1)}\}\cdots\cdots 3.2$$

此三公式完全可以用與前相同的方法證明，茲不贅。

猪的繁殖公式。此公式之所以發生興趣，在於焦氏之公式係由豬推算而來，雖所用符號不同，但可與作者之公式互為印證。根據以上公式1.0、2.0與3.0，設有早熟的豬，於出生後之次一年即可產仔，其繁殖公式應為：

$$u_n=u_{n-1}+ru_{n-1}=\ (1+r)\ u_{n-1}\cdots\cdots 4.0$$

於是

$$u_1=\ (1+r)\ u_0,$$

$$u_2=\ (1+r)\ u_1=\ (1+r)^2u_0\ ,$$

$$u_3=\ (1+r)\ u_2=\ (1+r)^3u_0\ ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\therefore\ u_n=(1+r)^nu_0.\ \cdots\cdots 4.1$$

試與焦氏之公式比較，可知其完全相同，焦氏之S_n在此處為u_n，而焦氏之p_f即為作者之u_0。設如使用年限為q年，則淘汰時豬已配種和產仔q次，而

$$\varDelta_n=\varDelta_{n-1}+r\{\varDelta_{n-1}+S_{n-(q+1)}\}=(1+r)\ \varDelta_{n-1}+rS_{n-(q+1)}\ ,\ \cdots 4.2$$

$$S_n=S_{n-1}+r\{S_{n-1}-S_{n-(q+1)}\}=\ (1+r)\ S_{n-1}-rS_{n-(q+1)}\ \cdots\cdots 4.3$$

在此，與其他農畜所不同者為r大於1，一般可以到3或4，因此母畜數S_n增加極快。

綜上所述，可以得到各種農畜之繁殖公式如下：——

$$u_n = u_{n-1} + r u_{n-p} \quad p = 1, 2, 3, 4 \cdots\cdots 5.0$$

$$S_n = u_n - u_{n-(q+1)} - \Delta_n, \quad \cdots\cdots 5.1$$

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + r\{\Delta_{n-p} + S_{n-(q+1)}\} \cdots\cdots 5.2$$

$$S_n = S_{n-1} + r\{S_{n-p} - S_{n-(q+1)}\} \cdots\cdots 5.3$$

在此，u_n＝使用年限內母畜繁殖所達數，

S_n＝進行淘汰後母畜繁殖所達數，

r＝凈繁殖率，

Δ＝由於淘汰未曾出生的母畜數，

p＝產仔年齡，

q＝淘汰年齡。

計算方法舉例。1）設某農場購入有前一年出生的純種母羊10頭，而由於飼養管理條件良好，凈繁殖率可達0.6，問10年後當可繁殖至母羊若干頭？

解：在此應注意，自出生之年算起，則須求11年後所能達到的頭數，因此n＝11；又使用年限（淘汰年齡）題中並未提及。假如羊種甚佳，當可希望每頭繁殖7次，即q＝8。於是代入1.2

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + r\{\Delta_{n-2} + S_{n-(q+1)}\},$$

$$\Delta_9 = \Delta_8 + 0.6\,(\Delta_7 + S_0) = 0.6,$$

$$\Delta_{10} = \Delta_9 + 0.6\,(\Delta_8 + S_1) = 1.2;$$

由公式1.0可以算出

$u_9 = 18.3280$，　　$u_1 = 1$，

$u_{10} = 26.0618$；　　$S_2 = u_2 = 1.6$；

代入1.1後，$S_9 = u_9 - u_0 - \Delta_9 = 16.7280$，

$S_{10} = u_{10} - u_1 - \Delta_{10} = 23.8618$；

於是代入1.3

$$\therefore \quad S_{11} = S_{10} + 0.6\,(S_9 - S_2) = 23.8618 + 0.6\,(16.7280 - 1.6)$$

$$= 32.9386。$$

$$\therefore 32.9 \times 10 = 329頭$$

2）用焦氏原題：某市現有產乳牛156頭，每日可產乳1000公斤；設其現在人口為366,000人，須若干年後，方可每人每晨平均獲得鮮牛乳0.2公斤？

解：根據資料，獲悉該市牛羣狀況如下：——

死亡率M＝20％，

繁殖率（每牛每年產犢數）R＝0.7，

仔畜之存活率 $V=80\%$，

母畜的牲比例 $X=50\%$，

留種率 $B=100\%$

使用年限 $q=15$ 年。

A）該市每晨共需鮮乳366,000×0.2=73,200公斤。

Б）減去現有1,000公斤外，尚欠72,200公斤，即尚差類似的牛 11,260 頭（每日平均產量爲6.4公斤）。

B）淨繁殖率 $r=R\cdot B\cdot V\cdot X=0.7\times1\times0.8\times0.5=0.28$

Г）死亡率爲20%，因此實際上所需繁殖到的數目爲

$$x=\frac{11260}{1-0.2}=14075\text{ 頭。}$$

因此每一頭需要繁殖到 $\frac{14075}{156}=90.2$ 頭

Д）根據使用年限 $q=15$，

$$\varDelta_{16}=ru_o=0.28,$$

$$\varDelta_{17}=ru_o+ru_1=0.56,$$

$$\varDelta_{18}=ru_o+ru_1+ru_2=0.84;$$

$$u_{16}=13.5205,$$

$$u_{17}=16.0991,$$

$$u_{18}=19.2872;$$

代入 5.2 以後，

$$S_{16}=12.2405,$$

$$S_{17}=14.5391,$$

$$S_{18}=17.4472;$$

$$\therefore\quad S_{19}=S_{18}+r\{S_{16}-S_3\}=20.5161,$$

……………………………………

$$S_{28}=S_{27}+r\{S_{25}-S_{12}\}=76.5532+0.28\ (64.9917-5.4860)=90.1622\text{頭。}$$

因此，如該市人口不增加，達到每人每晨有0.2公斤鮮牛乳，則須經28年。

根據焦氏之計算方法，祇需 18.59 年，即可達到所需數目，但根據作者的方法，可知此數錯誤甚大，因 S_{19} 祇等於 20,5161，即每頭至多祇繁殖至21頭，距所需尚少69頭。

或以爲在此題中吾人所假設的情況與該牛羣的不盡相同，因在此28年中能繁殖到

90頭的係指今年剛出生的母犢牛，而該牛羣156頭產乳牛中每頭都已達產仔年齡，而不需最初有3年的培養期間。實則此並不影響吾人之結果，因該牛羣中每牛繁殖達90頭雖可以少3年，但達到第一次分娩和產乳，仍須增加3年，因此所需的年代仍然相同。

3）某馬場在15年內擬繁殖馬匹至1000頭.設死亡率M爲10%，繁殖率$R=\frac{7}{9}$，性比例X＝0.5成活率V＝90%，留種率B＝100%，使用年限q＝15年，問在開始時需種母馬若干匹？

解：凈繁殖率$r=R\cdot B\cdot V\cdot X=\frac{7}{9}\times1\times0.9\times0.5=0.35$，

由於死亡率＝10%，實際所須繁殖到的馬匹數爲

$$\frac{1000}{1-0.1}=1111.1\text{匹。}$$

此數中半爲公，半爲母，因此實際所須繁殖的母馬數爲

$$\frac{1111.1}{2}=555.5\text{ 匹。}$$

如所購入的是3歲的母駒，在購入後當年即可配種。由於此等母駒是在三年前出生的，於是根據公式3.0，

$$u_{18}=u_{17}+ru_{13}=19.6737\text{。}$$

根據公式3.1，

$$\Delta_{16}=\Delta_{15}+r\{\Delta_{11}+S_0\}=ru_0=0.35$$
$$\Delta_{17}=\Delta_{16}+r\{\Delta_{12}+S_1\}=ru_0+ru_1=0.7$$
$$\Delta_{18}=\Delta_{17}+r\{\Delta_{13}+S_2\}=ru_0+ru_1+ru_2=1.05,$$
$$\therefore\ S_{18}=u_{18}-u_2-\Delta_{18}=19.6737-1.0-1.05$$
$$=17.6237 \qquad (\text{公式}5.2)$$
$$\therefore\ \frac{555.5}{17.6}=31.56=32\text{匹。}$$

三、各種表格的訂製

在實踐中，爲了計算的便利，可製訂各種表格。最常用的有u表和Δ表，以及S表。事實上，u表和Δ表祇需要q以上的頭幾個數字，而其餘的u則可逐代求出。Δ則尤爲簡單，因爲所有q及q以下的Δ都等於o。茲將q以上的頭幾個Δ列於下表：——

表 6

	豬	羊	牛	馬
Δ_{q+1}	r	r	r	r
Δ_{q+2}	2r(1+r)	2r	2r	2r
Δ_{q+3}	……	r(3+2r)	3r	3r
Δ_{q+4}	……	……	2r(2+r)	4r
Δ_{q+5}	……	……	……	r(5+r)

至於u則較複雜。由於各種農畜的使用年限多少為一定的常數，其u_{q+1}，u_{q+2}等可列表如下：——

表 7

豬	羊	牛	馬
(q=5,6)	(q=6,7)	(q=12,13)	(q=15, 16)
$u_6=(1+r)^6$,	$u_7=1+6r+10r^2+4r^3$,	$u_{13}=1+11r+36r^2+35r^3+5r^4$,	$u_{16}=1+13r+45r^2+35r^3+r^4$,
$u_7=(1+r)^7$.	$u_8=1+7r+15r^2+10r^3+r^4$,	$u_{14}=1+12r+45r^2+56r^3+15r^4$,	$u_{17}=1+14r+55r^2+56r^3+5r^4$,
	$u_9=1+8r+21r^2+20r^3+5r^4$,	$u_{15}=1+13r+55r^2+101r^3+35r^4+r^5$,	$u_{18}=1+15r+66r^2+84r^3+15r^4$,
		$u_{16}=1+14r+66r^2+136r^3+70r^4+6r^5$,	$u_{19}=1+16r+78r^2+120r^3+35r^4$,
			$u_{20}=1+17r+91r^2+165r^3+70r^4+r^5$.

此外，為了工作的便利，還製有每種農畜的S表，其中除豬以外，列有每種農畜繁殖至30年的數字，而豬則因為繁殖太快，祗列有10年的。表中豬的使用年限為5，羊的為6，牛的為12，馬的為15；淨繁殖率亦按照大致範圍予以假定。凡合於此種情況的在表中一查即得。在30年以外的（豬的在10年以外）需要用公式5.3逐代計算，而使用年限不同的應按照其各自的公式由$\varDelta$與u表及以後再由公式5.3求出。

四、結　　語

本文中證明了一系列的農畜繁殖公式，同時還製定了適當的表格，供畜牧工作者查閱之用。解答的方法甚為普遍：除所述的農畜之外，還可以應用於毛皮野獸及其他種牲畜。

參考文獻

（1）焦龍華，(1949)，焦氏家畜繁殖公式之導源與應用，台灣農林月刊3(2)。
（2）保利森科，К.Я.，(1952)，家畜繁育學原理，中華書局譯本，159，牲畜第一次交配的年齡。

附表1 猪的S表 p=1，q=5

u \ r	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1
1	3	4	5	6	7
2	9	16	25	36	49
3	27	64	125	216	343
4	81	256	625	1,296	2,401
5	243	1,024	3,125	7,776	16,807
6	726	4,092	15,620	46,650	117,642
7	2,172	16,356	78,080	279,870	823,452
8	6,498	65,376	468,380	1,679,040	5,763,870
9	19,440	261,312	2,341,400	10,073,160	40,345,032
10	58,158	1,044,480	11,704,500	60,432,480	282,400,818

附表2 羊的S表 p=2，q=6

n \ r	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	1	1	1	1	1
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000	1.7000
3	1.6000	1.8000	2.0000	2.2000	2.4000
4	1.9900	2.3600	2.7500	3.1600	3.5900
5	2.4700	3.0800	3.7500	4.4800	5.2700
6	3.0670	4.0240	5.1250	6.3760	7.7830
7	2.5080	3.8560	5.5000	7.4640	9.7720
8	3.1281	5.0656	7.5625	10.6896	14.5201
9	6.7521	6.0480	9.5625	14.2080	20.1705
10	7.2105	7.3542	12.3438	19.3018	28.6546
11	8.6392	8.8294	15.7500	25.9306	40.2610
12	10.0613	10.5391	20.0469	34.8237	56.6302
13	11.7330	12.4613	25.3594	46.5565	79.3648
14	13.9990	15.1345	32.6328	62.9723	112.1655
15	16.0790	18.0928	41.5313	84.4924	157.5568
16	18.2531	21.7274	53.0664	113.7510	221.9533
17	20.9137	26.0228	67.6602	152.8654	312.1848
18	23.7979	31.1820	86.3184	205.5576	439.3694
19	27.0536	37.3755	110.1250	276.3826	618.2576
20	30.6731	44.8638	140.6045	371.7833	870.2608
21	34.5895	53.7602	169.3506	499.8295	1224.5253
22	38.9677	64.4686	218.8872	672.2040	1723.4181

23	43.8686	76.8600	277.0293	903.8511	2425.2185
24	49.2848	92.2383	352.6428	1215.4543	3413.0818
25	55.3060	110.5095	447.9983	1634.4304	4803.1762
26	61.9754	132.4546	569.2572	2197.8734	6759.5531
27	69.3653	158.7129	722.9541	2955.4617	9512.5939
28	77.5811	190.1907	922.9074	3974.2880	13387.1134
29	86.7004	227.8884	1174.9409	5344.2426	18839.5365
30	96.8142	273.2207	1497.8800	7186.5047	26512.8629

附表 3　　牛　的　S　表　$p=3,\ q=12$

n \ r	0.20	0.30	0.35	0.40	0.45
0	1	1	1	1	1
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.2000	1.3000	1.3500	1.4000	1.4500
4	1.4000	1.6000	1.7000	1.8000	1.9000
5	1.6000	1.9000	2.0500	2.2000	2.3500
6	1.8400	2.2900	2.5225	2.7600	3.0025
7	2.1200	2.7700	3.1175	3.4800	3.8575
8	2.4400	3.1500	3.8350	4.3600	4.9150
9	2.8080	3.8370	4.7179	5.4640	6.2661
10	3.2320	4.6680	5.8090	6.8560	8.0020
11	3.7200	5.6130	7.1513	8.6000	10.2138
12	4.2816	6.7641	8.8026	10.7856	13.0335
13	3.7280	6.8645	9.4856	12.1280	15.1844
14	4.2720	8.2484	11.6386	15.1680	19.3306
15	4.9283	9.9776	14.3695	16.0822	24.7457
16	5.5427	12.0621	17.9705	24.5894	32.7920
17	6.2484	14.5754	22.4048	31.5023	43.0726
18	7.0369	17.6240	27.9770	40.4581	56.7715
19	7.9186	21.3096	35.1346	51.9550	74.8030
20	8.9020	25.7658	43.8354	66.7462	98.6143
21	9.9977	31.2137	54.7903	85.7842	130.0639
22	11.2165	37.7923	68.4814	110.2971	171.6206
23	12.5696	45.7560	85.6249	141.8684	226.5485
24	14.0689	55.4098	107.0904	182.5472	299.1816
25	15.7265	67.1074	133.9782	234.9803	395.2634
26	17.7946	81.6710	168.1399	303.1480	523.0621
27	20.0855	99.3287	210.9588	391.0729	692.2319
28	22.6588	120.8367	264.7784	504.6992	916.4743

29	25.5674	147.0167	332.3243	651.2926	1213.2223
30	28.8495	178.8951	417.1551	840.5714	1606.2531

附表 4　馬的S表　$p=4$, $q=15$

n \ r	0.20	0.30	0.35	0.40	0.45
0	1	1	1	1	1
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	1.2000	1.3000	1.3500	1.4000	1.4500
5	1.4000	1.6000	1.7000	1.8000	1.9000
6	1.6000	1.9000	2.0500	2.2000	2.3500
7	1.8000	2.2000	2.4000	2.6000	2.8000
8	2.0400	2.5900	2.8725	3.1600	3.4525
9	2.3200	3.0700	3.4675	3.8800	4.3075
10	2.6400	3.6400	4.1850	4.7600	5.3650
11	3.0000	4.3000	5.6550	5.8000	6.6250
12	3.4080	5.0770	6.6604	7.0640	8.1786
13	3.8720	5.9980	7.8740	8.6160	10.1170
14	4.4000	7.0000	9.3388	10.5200	12.5313
15	5.0000	8.3800	11.3181	12.8400	15.5126
16	4.4816	8.6031	12.2992	14.2656	17.7430
17	5.0560	10.1025	14.7051	17.3120	21.8457
18	5.7360	11.9295	17.6237	21.1200	27.0348
19	6.5472	14.6603	22.4205	27.6448	36.4154
20	7.4544	18.9121	28.1163	35.5328	47.9286
21	8.4838	22.8602	35.3685	45.8707	63.4605
22	9.6547	27.9638	44.4917	59.2038	83.9709
23	10.9915	34.1619	56.0307	76.5121	111.2681
24	12.5144	41.7740	70.5974	98.9296	147.5014
25	14.2487	51.1016	88.9945	127.9824	195.6337
26	16.2236	62.5418	112.2388	165.6502	259.5951
27	18.4733	75.5823	141.4076	214.5232	344.6490
28	21.0364	92.8217	178.3600	277.9577	457.7864
29	23.9567	113.7000	225.0968	360.3206	608.3258
30	27.2840	139.4195	284.2542	467.2957	808.6906